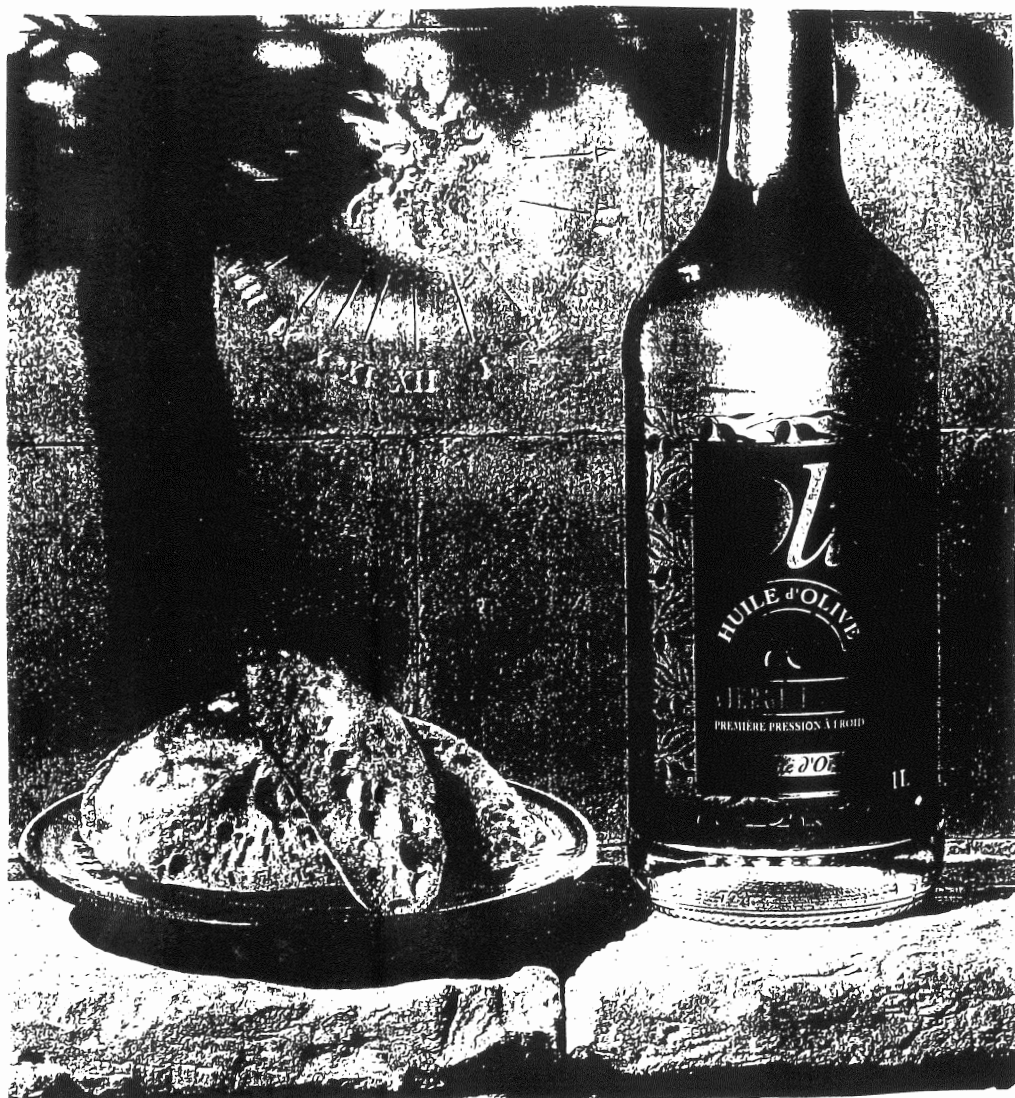


ANALEMA

BOLETIN DE AMIGOS DE LA ASOCIACIÓN DE
AMIGOS DE LOS RELOJES DE SOL

MONOGRÁFICO



La Asociación de Amigos de los Relojes de Sol fue creada en Abril de 1988. Figura en el Registro de Asociaciones con la referencia N-18685. Su Junta Directiva está formada actualmente por: LUIS HIDALGO VELAYOS, Presidente; JACINTO DEL BUEY PÉREZ, Vicepresidente; MANUEL LOMBARDEO SOTO, Secretario General; ANTONIO DE VICENTE CANDEIRA, Tesorero; JESÚS DE LA CALLE MONTES, M. ÁNGEL HACAR BENITEZ, MANUEL MARÍA VALDÉS CARRACEDO, BALDASAR SOTERA ELÍAS, Vocales; JUAN JOSÉ CAURCEL MORAN, ANTONIO ANGUJO ALVAREZ, JAVIER MORENO BORES, Asesores.

La Asociación constituye una entidad no lucrativa cuyos fines son el desarrollo y fomento de las investigaciones y estudios sobre temas históricos, geográficos y matemáticos relacionados con la difusión de los conocimientos relativos al cálculo, trazado, construcción, revisión y emplazamiento de Relojes de Sol y otros instrumentos astronómicos análogos.

Para el cumplimiento de estos fines se celebran reuniones periódicas, se mantiene contacto con otras Asociaciones o Entidades semejantes y se publica un Boletín Informativo cuatrimestral denominado ANALEMA. Ofrece a sus asociados los siguientes servicios:

- Información bibliográfica. Fondo con más de dos mil entradas referentes a Gnomónica
- Cálculo y trazado de cuadrantes y relojes solares, a petición de sus asociados o de cualquier entidad pública o privada.
- Reseña de libros y tratados de Gnomónica.
- Traducción y revisión de artículos de revistas o boletines o publicaciones sobre estos temas.
- Asesoramiento para la construcción o reparación de relojes solares o instrumentos semejantes.
- Comprobación y datación de cuadrantes antiguos.

Estos servicios son prestados por la Asociación a título gratuito - o en casos especiales a coste estricto - a las personas o asociaciones que así lo soliciten y sean presentadas por algún socio. En todo caso los servicios de asesoramiento son totalmente gratuitos para las entidades culturales.

Para obtener la condición de Asociado es necesario, de acuerdo con los Estatutos, la presentación por dos Socios de la persona interesada, y su admisión por la Junta de Gobierno. La cuantía de su aportación, en concepto de cuota anual, es fijada libremente por el propio interesado, pudiendo ser nula si este así lo desca. No obstante, para recibir el presente Boletín y el resto de las publicaciones de la Asociación, deberá aportar una cuota mínima equivalente a los gastos de envío.

Los artículos o notas publicados en este Boletín pueden ser reproducidos y utilizados, citando su procedencia y previa comunicación a esta Asociación. Se exceptúan los casos en los que expresamente se indique la existencia de derechos de autor o cualquier otro impedimento legal.

La Asociación de Amigos de los Relojes de Sol no se hace responsable del contenido o interpretación de los escritos, gráficos, tablas, ni de cualquier otra información contenida en los Boletines ni en ninguna de sus publicaciones colectivas. Agradece cualquier tipo de crítica, comentario, discusión o reseña de los mismos, que será transmitida al autor del escrito y publicada en el Boletín si, a juicio, de la junta, su interés o generalidad lo hiciese conveniente.

Se reserva el derecho de adaptar, resumir o editar, con el conocimiento previo del autor, los originales recibidos para su publicación. Su extensión no deberá exceder de cinco folios, salvo que su contenido, por su interés y continuidad aconseje publicarlos en varios números sucesivos o en forma de opúsculo o separata del Boletín.

La correspondencia puede ser dirigida a la Sede Social, o directamente al Secretario General de la Asociación de Amigos de los Relojes de Sol. M.Lombardero. Isaac Peral 48. E-28040 -MADRID

INICIACIÓN AL DISEÑO DE LOS RELOJES DE SOL

Jesús de la Calle

Introducción

Desde la más remota antigüedad, el hombre se ha sentido fascinado por el Sol, prueba de ello es que todas las civilizaciones de las que se tienen noticia han tenido un personaje o símbolo para representarlo. Ellos intuían que el Sol es una enorme fuente de energía y que la Naturaleza dependía de alguna forma de su presencia.

La sucesión de los días y las noches ha marcado siempre el ritmo de la vida del planeta y ha regulado el trabajo humano como una unidad básica del tiempo. Esto ha llevado al hombre, a interesarse por observar el movimiento del Sol como un indicativo del transcurso del día. Aún hoy, si estamos en el campo, cuando deseamos tener una idea de la hora que es, miramos al cielo para ver la posición del Sol. Esa misma idea debió llevar a los pueblos primitivos a imaginar medios para mejorar la observación, creando los primeros relojes de sol.

En estas páginas trataremos el fundamento de los relojes de sol que son más usuales. Son simples y fáciles de construir porque utilizan superficies planas. Intentaremos dar los conceptos básicos que nos hubiera gustado recibir cuando empezamos a interesarnos por los relojes de sol. Por ello suponemos que será útil a los que desean iniciarse en este tema. Seguiremos un proceso de transformación de unos relojes en otros porque así se hace mucho más fácil su comprensión.

Los relojes de sol que vamos a describir están formados por un conjunto de líneas en una superficie plana sobre la que se proyecta la sombra de un **estilo**, indicando así la hora solar y otros datos relativos al movimiento del Sol. Utilizaremos como estilo una varilla porque es una figura muy intuitiva y de fácil dibujo, pero no debemos olvidar que existen muchos tipos.

La primera precisión a hacer es que un reloj de sol indica solamente la **hora solar**, la cual no coincide con la hora oficial que marcan nuestros

relojes de pulsera, aunque como veremos más adelante, tienen una estrecha relación entre sí.

Para el trazado de los relojes utilizaremos solo métodos analíticos en vez de los diseños gráficos que son incómodos y menos seguros de plasmar en papel. No podemos ignorar que hoy día están muy extendidas las calculadoras de bolsillo con funciones trigonométricas que permiten efectuar los cálculos con suma facilidad. Evitaremos también la medida de ángulos, menos exactas que la de distancias, sobre todo si se usa papel milimetrado como soporte del diseño.

Un poco de historia

Quizás el reloj más antiguo haya sido una estaca clavada en la tierra, que al proyectar su sombra sobre el suelo permitía observar más fácilmente el movimiento de la sombra, en vez de mirar hacia la luz cegadora del Sol.



Fig. 1

Con este dispositivo tan elemental pudieron observar que el Sol está muy alto cuando los días son más calurosos y la sombra es más pequeña, mientras que en la época de los días más fríos la sombra es más alargada, intuyendo el calendario.

Esta idea tan simple pudo ser transcendental para deducir el ciclo anual y las estaciones, sobre todo para los pueblos que evolucionaron a la cultura de la agricultura. Esto les permitió deducir las épocas de la siembra y de las labores.

Los egipcios se preocuparon mucho sobre este tema aportando algunos modelos como son los obeliscos que quizás utilizaban como relojes, pero

no conocemos como eran las marcas en el suelo que daban el significado del movimiento de la sombra.

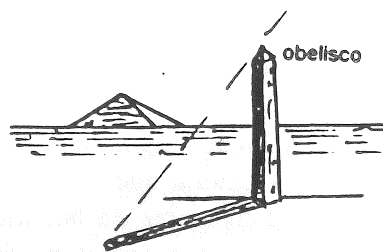


Fig. 2

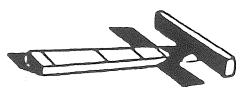


Fig. 3

Parece que el reloj más antiguo que ha llegado hasta nosotros es el que apareció en una tumba egipcia de hace unos 3.500 años. Está compuesto por dos listones en forma de T cuya barra mayor se ponía en dirección Este-Oeste para que la sombra de la barra menor se proyectara sobre la otra, que contiene las marcas de las horas. Estas no tenían el sentido tan preciso que nosotros les damos, no eran horas sino momentos del día, tales como: media mañana, el mediodía, etc. que se ha mantenido hasta la Edad Media.

Desde muy antiguo se conocen referencias a una forma curiosa de indicar la hora por medio de la longitud en pies de nuestra propia sombra, porque hay una relación muy precisa entre la altura de una persona y su pie. En una comedia de Aristófanes se dice: "te espero a comer cuando tu sombra tenga diez veces el largo de tu pie". Esto supone conocer el dato de la fecha porque la sombra es más alargada en invierno que en verano. Por ello en la Edad Media, que también se utilizaba este método, existieron tablas que relacionan las horas con el número de pies según los meses del año. Uno de ellos existe en la biblioteca del Monasterio de Silos.

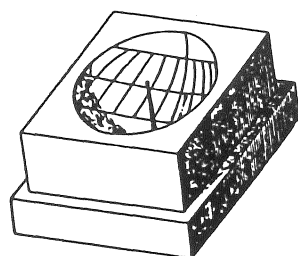


Fig. 4

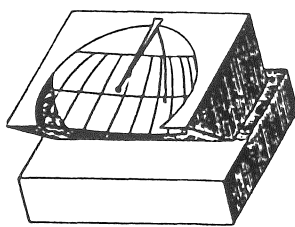


Fig. 5

Los babilonios ya usaban relojes de sol más elaborados, que fueron conocidos a través de los griegos que los perfeccionaron, como son los

"scaphe", fig. 4. Los romanos hicieron después la versión "hemicycle", fig. 5, semejante al que está en el Museo Arqueológico de Madrid.

Los obeliscos se siguieron utilizando. Uno de ellos estuvo instalado en Roma por Augusto y perduró hasta que los bárbaros lo destruyeron en 1085. Se utilizaba, sobre todo, para conocer la hora del mediodía (hora sexta), que se anunciaba al pueblo con el toque de un clarín para parar de trabajar a la hora de comer.

En la Edad Media aparece un tipo de reloj muy rudimentario dedicado a conocer las horas de los rezos de los monjes, por lo que se les llama "de horas canónicas", fig. 6.

Realmente no marcaban las horas solares, pues solamente tiene unas marcas sin numerar y como el estilo era perpendicular a la pared variaban los tiempos según la estación

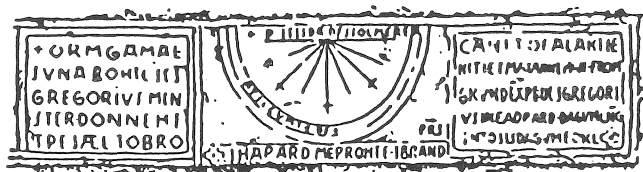


Fig. 6

Habrà que esperar hasta el siglo XII para que se recupere el conocimiento de esta técnica y de la Astronomía utilizando las traducciones que hicieron los árabes. En España cabe destacar la labor del rey Alfonso X el Sabio reuniendo en Toledo a sabios de las tres religiones que redactaron los "Libros del saber de Astronomía". Uno de ellos está dedicado a los relojes de sol, donde se describe con precisión un reloj horizontal con estilo vertical.

Más tarde comienza a utilizarse un estilo paralelo al eje del mundo que produce una línea horaria independiente del día del año.

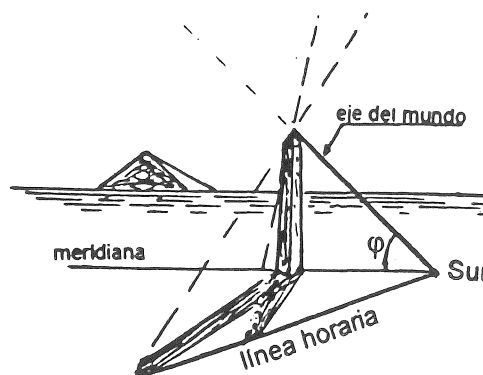


Fig. 7

Durante el Renacimiento se difunden los relojes por toda Europa. Raramente faltaban en las iglesias, que siempre tenían una pared orientada al Sur porque se construían con el altar mayor hacia el Este. Eran de utilidad para saber las horas de las misas, pero después, las reformas de sus edificios acabaron con casi todos ellos.

En el siglo XIV comienza el desarrollo científico de la Astronomía, que necesita de medidas de gran precisión sobre los movimientos del Sol. Se utilizaban para esto un tipo especial de reloj de sol llamado “**meridiana**”. La primera fue construida por el astrónomo P.Toscanelli que aprovechó la cúpula de Santa María de Fiore de Florencia para abrir un orificio a 90 metros de altura que dejaba pasar, a la hora del mediodía, un rayo de sol sobre una línea en el suelo. Este dispositivo se utilizó también para determinar las fechas de la liturgia con más precisión que con las tablas astronómicas de la época. En España pueden verse las dos del palacio de El Escorial.

A partir del siglo XVI aparecen tratados con base matemática para la construcción de relojes de todas clases, no solamente sobre los que ya eran muy conocidos, como los horizontales y verticales, sino de las formas más originales; poliédricos, dipticos, de altura y analemáticos.

En esta época aparecen los relojes mecánicos, que provocarían la decadencia de los relojes solares, pero eran aún tan imperfectos que debían ponerse en hora, casi diariamente, con la ayuda de un reloj de sol como muestra la figura 8.

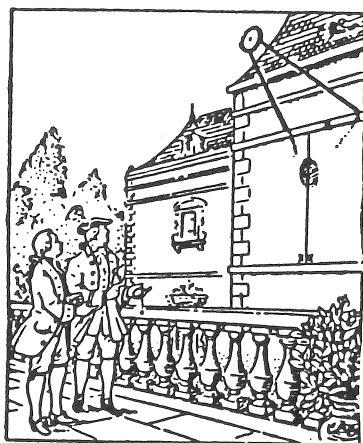


Fig. 8

Cuando los relojes mecánicos fueron más perfectos, se hizo patente que la hora solar tenía adelantos y atrasos debidos al movimiento no-uniforme del Sol en su órbita, que puede llegar a 16 minutos de diferencia con la **hora media** uniforme que indica un buen reloj mecánico. Como consecuencia de ello se empezó a establecer esta **hora media** como hora oficial. En Francia se legalizó en 1815 y más tarde en los demás países. Aún así, la hora se seguía rigiendo por el meridiano del lugar, por tanto, cuando en Barcelona eran las 12 del mediodía en Pontevedra eran apenas las 11 y $\frac{1}{4}$, lo que no suponía ninguna dificultad en aquella época.

El desarrollo de las comunicaciones creó la necesidad de un sistema horario que relacionara a los distintos lugares. Para ello se estableció en 1912 el **tiempo universal** (TU), asignando el origen de los tiempos al meridiano 0 que pasa por Greenwich y los husos horarios cada 15 grados.

La llegada del ferrocarril fue un suceso trascendente en el cambio de criterio sobre las horas. Como para el horario de los trenes se necesitaban horas comunes para todo el país, el reloj de la estación llevó a todos los pueblos a usar la hora de ese reloj, que era la hora media ya legalizada.

El nuevo patrón horario dejó sin uso a los relojes de sol, utilizándose solamente en el campo, donde no se disponía de relojes mecánicos y el trabajo se regulaba por las horas de sol.

Sobre el movimiento del Sol

Hablando de relojes de sol se suele suponer, aunque no sea cierto, que la Tierra está fija y es el Sol el que gira a su alrededor, porque éste es el efecto aparente en el transcurso del día, además las explicaciones se hacen más fáciles.

Para comprender el movimiento diurno del Sol en la esfera celeste suponemos que en el centro O de la esfera de la figura 9 hay un observador que tiene un horizonte circular a su alrededor y que sobre su vertical está el cenit Z. La altura del polo Norte P sobre el horizonte (lo que es igual, a la

altura del cenit sobre el ecuador celeste) indica la **latitud del lugar**, designada por la letra ϕ .

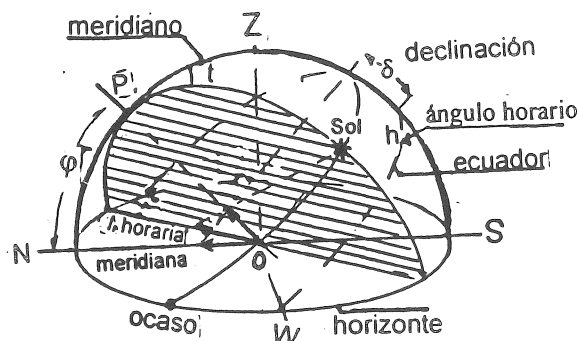


Fig. 9

El Sol en su recorrido diario desde su salida hasta el ocaso, describirá un arco en el cielo que estará por encima del ecuador celeste en los meses de primavera y verano, y por debajo del ecuador, en los meses de otoño e invierno.

Es importante comprender que el Sol se desplaza cada día en un plano que es perpendicular al eje del mundo, por lo que el ángulo h recorrido en un tiempo dado t , será el mismo aunque varíe la fecha del año y esté en otro plano paralelo, correspondiente a otra fecha. Por tanto, un estilo en el eje del mundo proyectará una sombra sobre el suelo que tendrá la misma dirección en cualquier fecha, aunque será distinta su longitud.

Una pareja de valores: **declinación** δ (altura sobre el ecuador) y **ángulo horario** h (entre meridianos), definen la posición de un astro en la esfera celeste, tal como el Sol, ($h \cdot 15 = t$ grados). Este es el sistema de coordenadas ecuatoriales.

Si suponemos un círculo máximo que pase por los polos y por el Sol a una hora dada, éste será un **círculo horario**, lo que significa que el Sol está en él todos los días a esa hora. En la figura 9 se ve que el Sol, la varilla y su sombra están en el mismo plano del círculo horario.

De los círculos horarios, el que pasa por la vertical del lugar del observador se llama **círculo meridiano**, en el cual está el Sol a las **12 horas solares** y corta al plano horizontal por la línea **meridiana del lugar** o dirección N-S.

Para conocer el instante en que el Sol pasa sobre la línea meridiana del lugar, el procedimiento más

sencillo es el denominado **círculo indio**. Consiste en clavar en un tablero un estilo bien perpendicular y con centro en él, trazar una serie de arcos de círculo, según se aprecia en la figura 10. Los radios deben ser de 1 a 2 veces la altura del estilo.

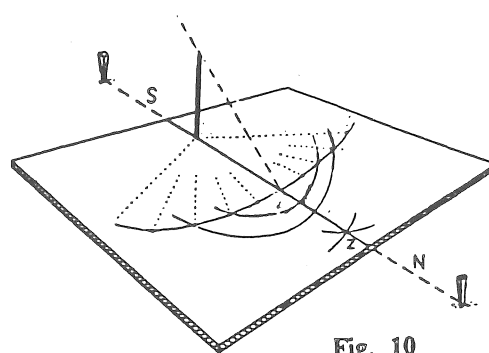


Fig. 10

Colóquese el tablero bien horizontal, con la ayuda de un nivel, de forma que el lado del estilo esté hacia el Sur. Cuando el extremo de la sombra toque en alguno de los círculos, se hará una marca y cuando vuelva a tocar en el mismo círculo se hará otra. La bisectriz (Z) del arco entre las dos marcas será la dirección de la **meridiana del lugar**. Este dispositivo nos permitirá saber, otro día, el instante en que el Sol pasa por la meridiana del lugar. Hay otros procedimientos más exactos y cómodos que se describirán más adelante.

Reloj ecuatorial

Este es el reloj más sencillo e intuitivo, tal como se sugiere con la figura 11, del cual se pueden deducir otros muchos.

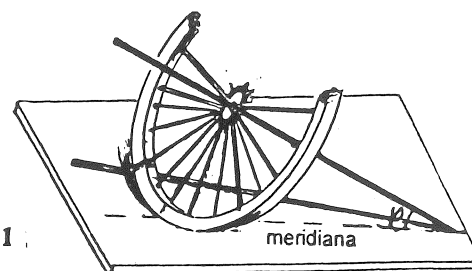


Fig. 11

Consiste básicamente en una varilla paralela al eje del mundo que pasa por el centro de un círculo paralelo al ecuador, según la figura 12. Si se trazan 24 radios y si uno de ellos está sobre la meridiana, cada radio coincidirá con uno de los

24 círculos horarios del día, y por tanto, a cada hora entera la sombra de la varilla caerá sobre uno de los radios, indicando así la hora.

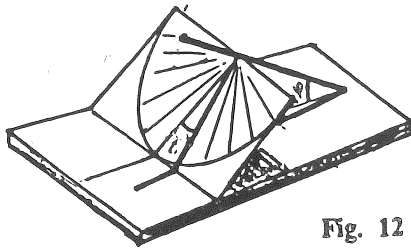


Fig. 12

La única condición es que la varilla sea paralela al eje del mundo, por lo tanto, si se lleva a otro lugar funcionará perfectamente con sólo ajustar el ángulo ϕ según la latitud de este nuevo lugar.

El inconveniente de este diseño está en que la sombra se proyecta sobre la cara superior durante los meses de primavera y verano en los que el Sol está por encima del ecuador (declinación positiva) y sobre la cara inferior en los meses de otoño e invierno (declinación negativa). Esto hace incómoda su lectura y sobre todo que en los días en los que el Sol está justo en el ecuador (equinoccio) no se proyecta la sombra sobre el círculo. Esto se soluciona sustituyendo el círculo por una cinta circular sobre la que se proyecta la sombra de la varilla, según la disposición de la figura 13, con la ventaja adicional de permitir mucha más precisión en el trazado de las marcas.

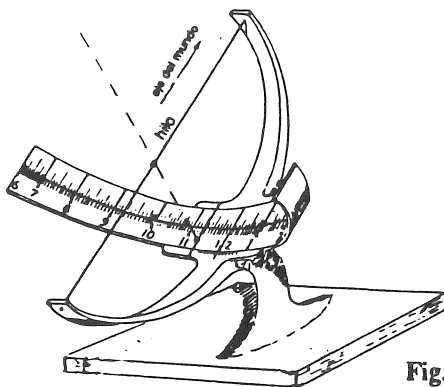


Fig. 13

En Madrid hay un reloj monumental de este tipo junto a la Puerta de Toledo.

Reloj polar

Este reloj se deduce fácilmente del ecuatorial, sustituyendo la cinta circular del reloj anterior por una superficie plana paralela al ecuador, según se aprecia en la figura 14. Antes, la distancia angular era de 15 grados por hora. Ahora, la distancia desde la línea de las 12 horas será variable. Si la altura de la varilla sobre el cuadro es l , para la hora h la distancia será: $l * \text{tg}(15 * h)$, por lo tanto, las líneas se separarán entre sí cada vez más. Así, la línea de las 5 sería la última a marcar para un reloj de dimensiones prudentes.

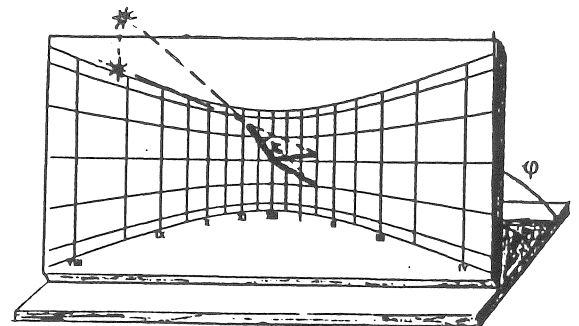


Fig. 14

Por supuesto que este reloj no podrá marcar las horas anteriores a las 6 de la mañana y posteriores a las 6 de la tarde en los meses de primavera y verano, aunque ya ha salido el Sol, porque éste no ilumina al cuadro del reloj.

Reloj horizontal

Este reloj se comprende fácilmente al observar la figura 15, en la que se representa un reloj ecuatorial y la proyección de la sombra de la varilla sobre el suelo.

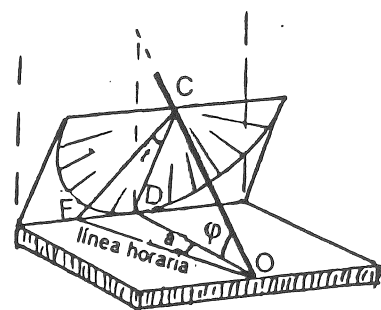


Fig. 15

Si se marcaran esas líneas sobre el suelo se dibujaría el reloj horizontal, pues la sombra es común para los dos relojes. Para la hora h , el ángulo de la línea horaria en el reloj ecuatorial era

$t = h \cdot 15$ y en el reloj horizontal se puede calcular el ángulo a sobre el suelo.

El segmento DF es común a ambos relojes, por tanto se tiene: $DF = OD \cdot \operatorname{tg} a = CD \cdot \operatorname{tg} t$

luego: $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{sen} \varphi$. [1]

Este reloj puede indicar también las horas septentrionales de primavera y verano, porque habrá sombra en su cara para todas las horas en las que el Sol está por encima del horizonte.

Reloj vertical no declinante

Este es el caso de un reloj dibujado sobre un muro o pared que está orientada exactamente al Sur, o sea que es perpendicular a la línea meridiana del lugar. Este tipo de reloj no presenta dificultades y se comprende bien al prolongar la varilla del reloj horizontal hasta que toque en una pared vertical, tal como muestra la figura 16. Su diseño es semejante al del reloj horizontal con la única diferencia de que ha de tomarse el ángulo $90-\varphi$ en vez de φ , es decir que el ángulo con la vertical será :

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} t \cdot \cos \varphi. \quad [2]$$

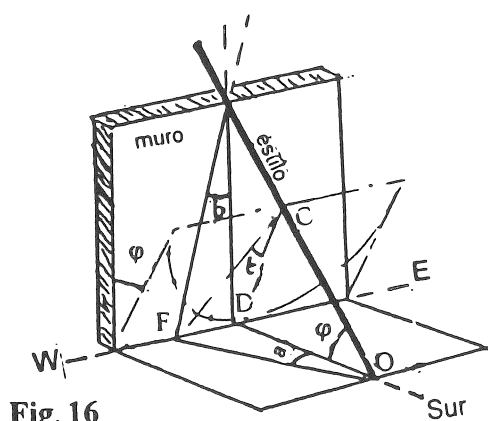


Fig. 16

Para que este reloj pueda marcar las horas septentrionales, en los meses de primavera y verano, habrá que añadir marcas a la espalda de la pared y una varilla como si fuera la prolongación de la del lado meridional. Su diseño no ofrece dificultades porque esas líneas horarias son la prolongación de otras con igual ángulo horario pero en sentido ascendente. Así, por ejemplo, la línea de las 5 de la mañana es la prolongación de la de las 5 de la tarde.

Antiguamente se utilizó mucho un reloj portátil combinado, conocido como díptico, según muestra la figura 17. Solía llevar incorporada una pequeña brújula para su orientación.

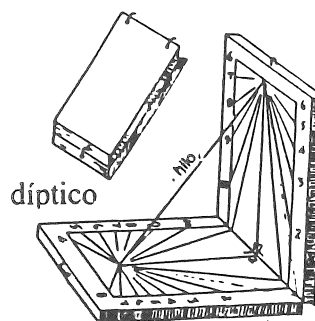


Fig. 17

Reloj vertical declinante

Supongamos ahora que la pared no está orientada mirando exactamente al Sur. El diseño del reloj se complica bastante y los errores pueden ser grandes si no se calcula con precisión la orientación de la pared, es decir, el ángulo que forma con la línea Este-Oeste. Esta desviación d se suele denominar **declinación del muro** y es de signo positivo si la pared mira hacia el Oeste. No se debe confundir con la declinación del Sol δ .

La figura 18 muestra una pared declinante como consecuencia del giro, con un ángulo d de declinación

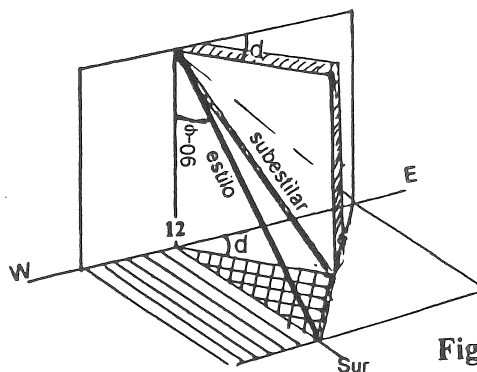


Fig. 18

La línea de las 12 horas es siempre la vertical, cualquiera que sea la orientación de la pared, porque, si ésta gira sobre esa vertical, la sombra al mediodía estará siempre sobre ella por ser el propio eje, pero el resto del reloj sufre un giro del haz de las líneas horarias según sea la declinación del muro (Fig. 19)

Hasta ahora los relojes han sido todos simétricos con relación a la línea de las 12 horas; pero en este reloj, el eje de simetría se desplaza a una línea llamada **subestilar** que es la proyección ortogonal del estilo o varilla sobre la pared. Esto significa que cuando el Sol esté justamente perpendicular a la pared, la sombra de la varilla caerá sobre esta subestilar.

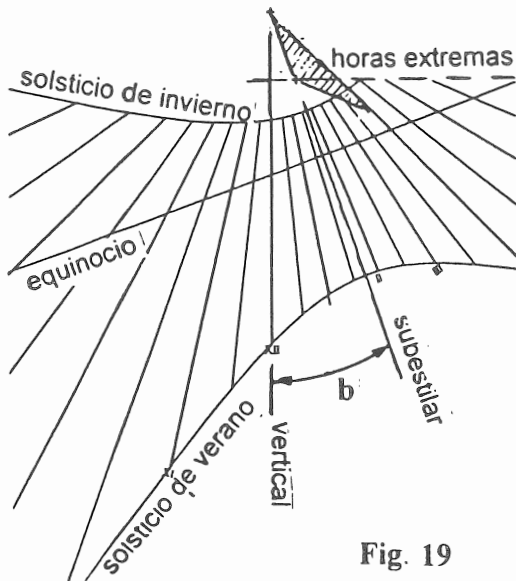


Fig. 19

Si conociéramos el ángulo **b** que la subestilar forma con la vertical, el problema estaría resuelto porque se reduciría a diseñar un reloj vertical con la línea de las 12 horas sobre ese eje de simetría (que es la subestilar) y después volver a numerar las marcas de forma que la línea de las 12 coincida con la vertical.

Veamos como calcular estos ángulos.

Cálculo de la declinación del muro

Para realizarlo interesa un método fiable y que la obtención de los datos sea tan simple que se pueda encargar a una persona que no tenga ninguna experiencia, de forma que ni siquiera fuera preciso haber visto donde se ha de instalar el reloj.

El ángulo de declinación de un muro se puede conocer por la diferencia de tiempos **T** entre la hora en que el Sol pasa por la meridiana y de otro instante característico fácilmente reconocible,

como es el momento en que el Sol está justamente frente al muro. Esa diferencia será un indicativo fiel de la orientación del muro con relación a la línea Este-Oeste.

Si suponemos una plomada separada del muro, su sombra estará al mediodía sobre la meridiana del lugar, como ya sabemos. Cuando el Sol esté frente al muro, la sombra habrá recorrido un ángulo horario **T** pero sobre el suelo habrá recorrido un ángulo **d** que será igual a la declinación del muro.

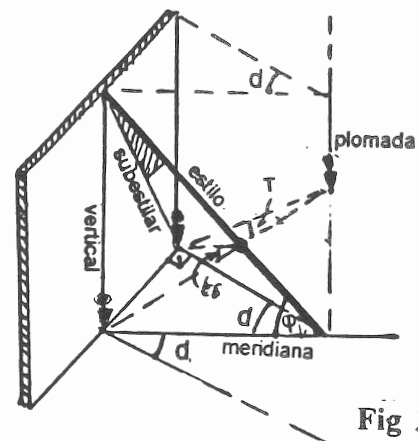


Fig 20

El instante en que el Sol está frente al muro se puede observar por la sombra de un indicador que

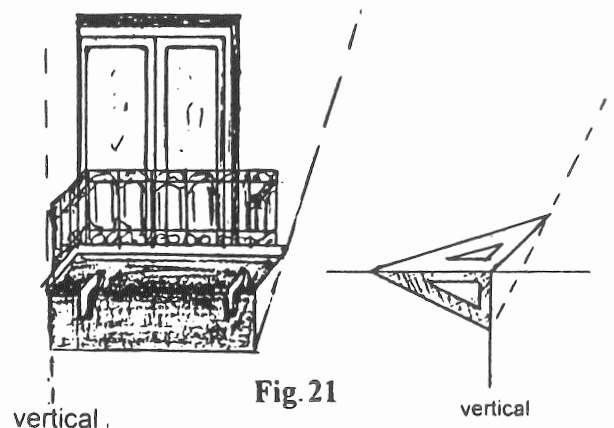


Fig. 21

esté en un plano vertical, tal como el saliente de un balcón, el borde de una escuadra o el de una carpeta puesta sobre una línea horizontal. En tales casos, cuando la sombra sea vertical podemos

asegurar que el Sol está en un plano perpendicular al pie del muro.

La hora de paso del Sol por la meridiana la podemos conocer con la ayuda del círculo indio, ya descrito, bien por medio del Anuario del Observatorio Astronómico o calcularla según se describirá más adelante.

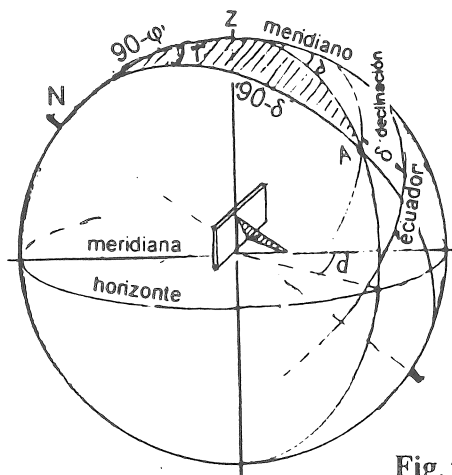


Fig. 22

El tiempo T de diferencia (expresada en grados) entre estos dos instantes y el ángulo d de declinación del muro están relacionados en el triángulo esférico NZA de la figura 22 en función de la declinación del Sol δ de ese día y la latitud del lugar φ , según la ecuación :

$$\operatorname{tg} d = \operatorname{sen} T / (\operatorname{sen} \varphi \cdot \cos T - \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta) \quad [3]$$

Este ángulo d es también el ángulo a de una línea horaria en un reloj horizontal que podemos imaginar en el suelo y que ya sabemos calcular con la fórmula [1]: $\operatorname{tg} d = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{sen} \varphi$. Pero además, el valor de t corresponde al tiempo que tarda la sombra del estilo en pasar desde la vertical hasta la subestilar, ver Fig. 20. Por tanto, la hora de la subestilar se obtendrá de:

$$\operatorname{tg} ts = \operatorname{tg} d / \operatorname{sen} \varphi \quad [4]$$

El ángulo b que la subestilar forma con la vertical, correspondiente a la hora subestilar, se puede calcular por el triángulo esférico de la

figura 23, que es rectángulo en la subestilar. luego: $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} ts \cdot \operatorname{sen} (90 - \varphi)$ [5]

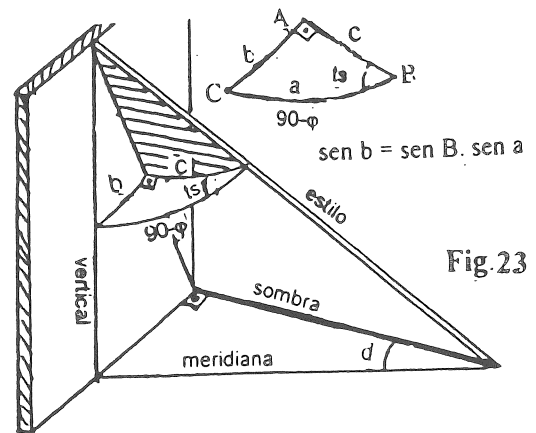


Fig. 23

Obsérvese que no ha sido necesario materializar la meridiana, con lo cual se evitan muchos trabajos y faltas de precisión. Marcar la dirección Norte-Sur sobre el suelo no es una tarea fácil, a menos que esté bien nivelado y sea muy liso.

De lo anterior se deduce que para el diseño del reloj se debe conocer la hora exacta en que el Sol está frente al muro y también la fecha de la observación para poder conocer la declinación δ .

Trazado del reloj vertical declinante

En este tipo de reloj la colocación de la varilla puede ser una tarea complicada. Pero el estilo es realmente una línea en el espacio que representa al eje del mundo y forma con la vertical y la subestilar un triedro, del cual podemos conocer el ángulo c que forma el estilo con la subestilar:

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} (90 - \varphi) \cdot \cos ts \quad [6]$$

Por tanto, es posible construir una pieza (área triangular rayada en la figura 23) que tenga ese ángulo c y se fije sobre la subestilar, normal a la pared, para que nos proporcione un borde que ha de coincidir con el eje del mundo.

Teniendo ya definido el eje de simetría, que es la subestilar y resuelta la fijación del estilo, podemos calcular un reloj cuyo estilo forme un ángulo c con la pared y que la subestilar haga las veces de la línea de las 12 horas.

La línea horaria de la 1 se separará de la subestilar un ángulo de $(ts - 15)$ grados, la de las 2 el de $(ts - 2 \cdot 15)$ grados (ver fig. 19) y en general, el ángulo para la hora h será:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} (ts - h \cdot 15) \cdot \operatorname{sen} c \quad [7]$$

Después, sólo faltará volver a numerar las líneas horarias de forma que la línea de las 12 horas quede situada sobre la vertical.

El calendario

Hasta ahora solamente nos hemos ocupado del trazado de las líneas horarias, pero un reloj de sol puede proporcionar otros datos, deducidos del movimiento del Sol, tal como el calendario.

Como es bien sabido, el Sol varía su altura sobre el horizonte según los meses del año y como consecuencia de ello, el estilo proyectará su sombra más o menos larga en la cara del reloj, indicando su extremo la época del año.

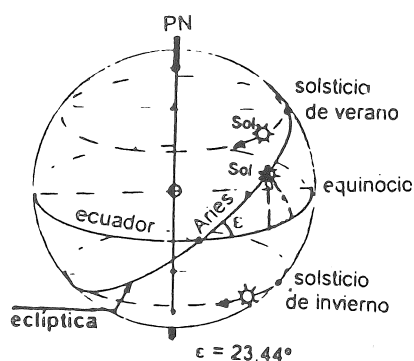


Fig. 24

Las variaciones de longitud de la sombra según la época del año son debidas a que el Sol se mueve en la eclíptica (plano inclinado 23.44 grados con relación al ecuador), según muestra la figura 24.

En el solsticio de invierno, 21 de diciembre, el Sol está en su punto más inferior y a partir de esa fecha inicia un ascenso, al principio casi imperceptible (solsticio significa sol parado) hasta llegar al equinoccio de primavera, el 20 de marzo, en que se sitúa en el ecuador. Ese día la declinación será de 0 grados, por lo que los días y noches son iguales (equinoccio significa iguales noches) y el Sol sale exactamente por el Este y se pone por el Oeste. Este punto de intersección de la eclíptica con el ecuador se denomina **punto de Aries** porque el Sol entra en ese signo del zodiaco.

A partir del 20 de marzo, el Sol sigue ascendiendo hasta alcanzar su máxima altura el 21 de junio (solsticio de verano) en que comienza

a descender, pasa por el equinoccio de otoño y se cierra el ciclo.

Hacemos un inciso para aclarar que los signos del zodiaco no coinciden con las constelaciones del mismo nombre. Desde que los griegos les asignaron nombres han pasado unos 2.500 años y durante ese tiempo el punto de Aries se ha retrasado unos 30 grados, debido al fenómeno secular de la precesión de los equinoccios, por tanto el Sol está en esa fecha entrando en la constelación de Piscis. En Astronomía se han mantenido por razones de comodidad las fechas de los signos, separados ya de tales constelaciones.

Esta evolución anual del Sol puede quedar reflejada en la cara del reloj. La línea que sigue el extremo de la sombra a lo largo del día se llama **línea de declinación diaria** porque representa la declinación del Sol durante ese día. El trazado de estas líneas para algunos días del año, como por ejemplo los días de comienzo de un signo del zodiaco, conforma un verdadero calendario donde podemos leer las estaciones o los meses del año.

Estas líneas son hipérbolas como puede verse en la figura, pues se producen por la intersección del plano del reloj con el doble cono que describen los rayos de sol durante los días del año al pasar por su vértice, que es el extremo del estilo. En los días de los equinoccios esa línea es una recta porque el Sol está en el mismo plano que el extremo de la varilla. En la figura puede verse estas líneas en un reloj vertical.

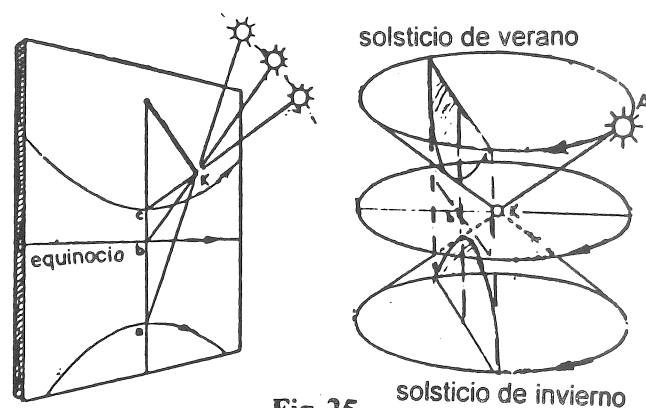


Fig. 25

La longitud de la sombra en un reloj horizontal se puede calcular basándose en la figura 26, semejante a la figura 15, en la que se ve que el ángulo α para una hora dada h será: $\operatorname{tg} \alpha = CF / l$ y como $CD = CF \cdot \cos h = l \cdot \operatorname{tg} \varphi$ se tiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi / \cos (h * 15) \quad [8]$$

para esa hora h en cualquier día del año, entre ellos los días de equinocio ($\delta = 0$).

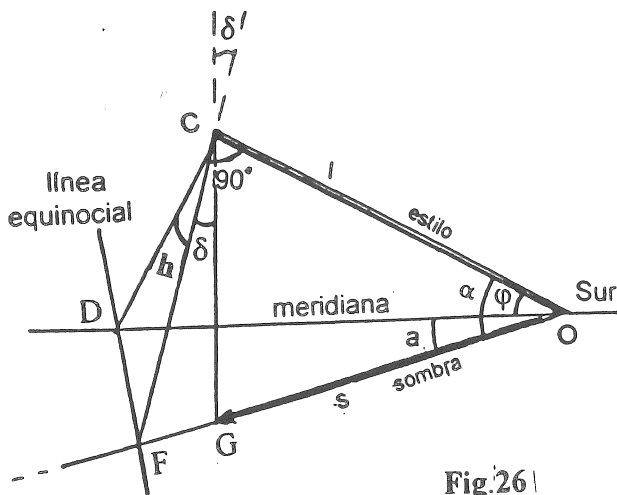


Fig. 26

Cuando la declinación del Sol cambia, la sombra variará pero conservando el mismo ángulo α .

En el triángulo OCG se tiene: $s / \operatorname{sen} C = l / \operatorname{sen} G$

$s / \operatorname{sen} (90 - \delta) = l / \operatorname{sen} (180 - 90 + \delta - \alpha)$, luego:

$$s = l \cdot \cos \delta / \cos (\alpha - \delta) \quad [9]$$

Lo cual nos permite calcular la posición del extremo de la sombra sobre una línea horaria.

Para un reloj vertical el cálculo sería semejante, según ya sabemos, sustituyendo el valor de φ por el de $(90 - \varphi)$ si no es declinante, y si es declinante por el del ángulo c , que ya vimos como se calcula.

A continuación se relaciona la declinación del Sol para los días del comienzo de cada signo del zodiaco:

0.00° Aries (20 marzo) Primavera, equinocio

11.48° Tauro (20-abril) “

20.15° Geminis (21 mayo) “

23.44° Cancer (21 junio) Verano, solsticio

20.15° Leo (23 julio) “

11.48° Virgo (23 agosto) “

0.00° Libra (23 septiem) Otoño, equinocio

-11.48° Escorpio (23 octub.) “

-20.15° Sagitario (22 novi.) “

-23.44° Capricornio (22 dicie) Invierno, solsticio

-20.15° Acuario (20 enero) “

-11.48° Piscis (18 febrero) “

El valor aproximado de δ para cualquier día N del año puede obtenerse con la expresión:

$$\delta = 23.44^\circ * \operatorname{sen} 0.97 (N - 81.5) \quad [10]$$

Un caso especial de calendario lo constituye la **meridiana**, ya aludida al principio. Es un reloj horizontal que tiene solamente la línea de las 12 horas sobre la cual están marcados los signos del zodiaco o los meses del año.

Relojes de hora media

La hora de nuestros relojes de pulsera indican la hora de un día uniforme a lo largo de todo el año, a diferencia del día solar que tiene adelantos y retrasos, aunque esto nos pueda sorprender.

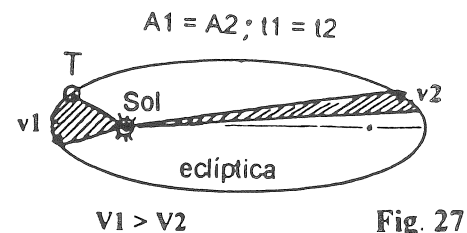
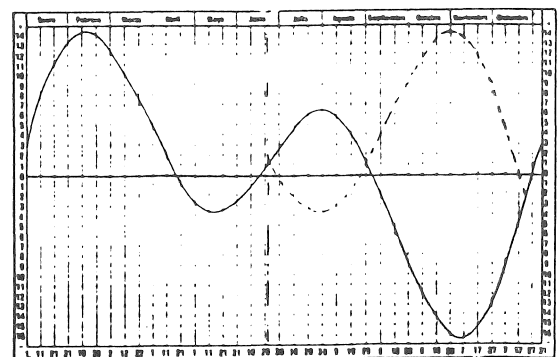


Fig. 27

Esta diferencia es debida a dos causas: Por una parte, la Tierra al girar alrededor del Sol lleva una velocidad que no es uniforme, debido a que al estar el Sol en uno de los focos de una elipse, que es la eclíptica, la velocidad de giro de la Tierra es más rápida cuando está más cerca de ese foco, de acuerdo con la 2ª ley de Kepler, (de las áreas barridas), Fig. 27. Por otra parte, el Sol se desplaza por la eclíptica que está inclinada 23.44° con relación al ecuador, por tanto las proyecciones sobre él no son constantes, Fig. 24.



ET = día medio - día verdadero (reloj solar)

Fig. 28

Estos adelantos y retrasos se expresan por la **ecuación de tiempo** y se representan mediante la curva de la figura 28. Si se pliega por la fecha del 21 de junio produce una curva "en 8" llamada **lemniscata**, que puede dibujarse en el reloj.

Para mayor precisión ver Analema nº 3 pag.3.

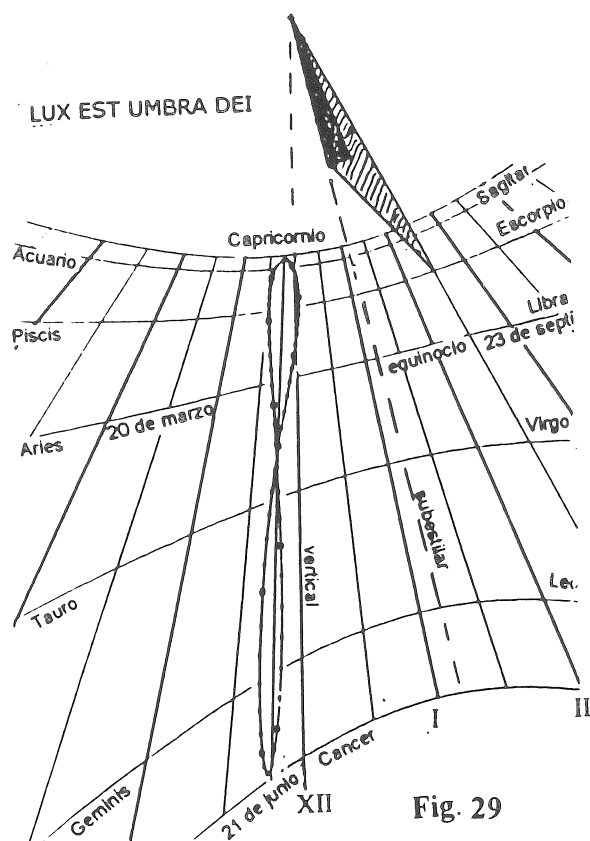


Fig. 29

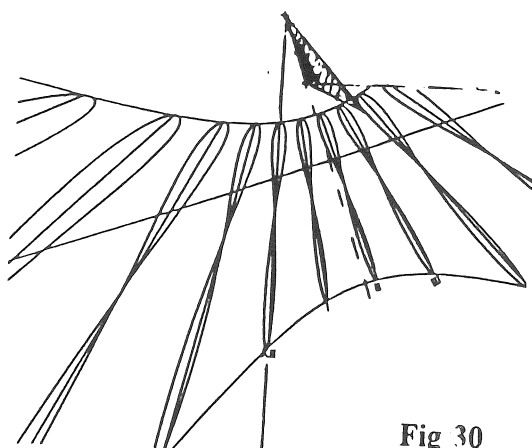


Fig 30

Si en vez de trazar las rectas de las líneas horarias dibujáramos estas curvas, tendríamos un reloj de horas medias leyendo la hora por el extremo de la

sombra en el punto correspondiente al día del año, pero su trazado es muy laborioso

Otra forma de hacer consiste en dibujar en una de las horas, esta curva lemniscata. Así se estima el adelanto o retraso de ese día, tal es el caso del reloj completo de la figura 29, en el que aparecen las líneas horarias, las líneas de declinación diaria y la lemniscata de la ecuación de tiempo.

Hora oficial

Si deseamos deducir la hora de nuestro reloj de pulsera no podemos olvidar que la hora solar en Castellón de Plana, que está en el meridiano 0, no es igual a la de Madrid, por ejemplo. El Sol tarda 14m 45s (a razón de 1 hora por cada 15°) en pasar de un meridiano a otro y habrá que tenerlo en cuenta. Por esa razón la lemniscata debe estar dibujada unos 15 minutos antes de la línea de las 12 horas si queremos indicar el instante en que el Sol pasa por el meridiano 0, según la figura 29.

Con esta disposición se tienen todos los datos para deducir la hora oficial con la ayuda del reloj de sol, teniendo en cuenta que España peninsular tiene su hora oficial adelantada 1 hora (2 en verano) sobre el tiempo universal.

La regla mnemotécnica para deducir la hora oficial puede ser ésta: **cuando el extremo de la sombra toca en la lemniscata en la fecha del día, será la 1 del mediodía** (en invierno).

De lo anterior se deduce que la hora oficial del paso del Sol por la meridiana será:

12h ± ecuación de tiempo ± diferencia de longitud (hora/15°) + 1h (en invierno)

Leyendas

Es muy frecuente y típico que en el cuadro del reloj figure alguna frase, muchas veces en latín, sobre la luz, el Sol, Dios, la vanidad de las cosas, la fugacidad de la vida etc. Otras son alegres, humorísticas o alusiones a la casa en que está.

Realización

Hoy día, la forma más cómoda de diseño es utilizar un programa informático de los ya desarrollados que proporcionan todos los valores (o bien calcularlo según lo explicado antes) que permite dibujar el reloj sobre papel milimetrado a tamaño real. Completado el diseño, se perfora en

los puntos significativos del dibujo por medio de un sacabocados. Aplicado el papel sobre la superficie donde se ha de trazar el reloj, se hacen marcas de los puntos significativos usando los orificios (técnica del estarcido). Retirado el papel, quedarán una serie de marcas que permitirán completar el dibujo del reloj.

Ejemplo de un reloj horizontal (Fig. 31)

Longitud $\phi = 40^\circ\text{N}$; Latitud $\lambda = 6^\circ\text{W}$; $l = 100\text{ mm}$

Estilo recto (en A) $= l \cdot \sin \phi = 64.3\text{ mm}$.

Subestilar (AB) $= l \cdot \cos \phi = 76.6\text{ mm}$

A – Coordenadas x-y de las líneas horarias.

Como el reloj es simétrico con relación a las 12 horas, sólo se calcularán las horas de la tarde.

Utilizando la ecuación [2] se obtiene el valor del ángulo a para cada línea horaria. Para tener las coordenadas de un punto de esas líneas se hace fijo el valor de y , $(1.5 \cdot l)$. luego x será: $150 \cdot \tan a$.

Los valores para las primeras líneas horarias son:

12 h: $x = 0.0$; $y = 150$ — 12½ h: $x = 12.7$; $y = 150$

1 h: $x = 28.5$; $y = 150$ — 1½ h: $x = 39.9$, $y = 150$

Se han marcado en la figura, los valores de la 1h.

Cuando x es mayor que 150. se hace $x = 150$.

4h: $x = 150$ $y = 134.7$ — 4½ h: $x = 150$ $y = 96.7$

B – Distancias de las hipérbolas al vértice

Se calcula, para cada media hora, el valor de α con la fórmula [8], y la longitud de la sombra sobre las líneas horarias desde el polo B, con la fórmula [9]. Por ejemplo:

Capricornio: 12h 205.2 — 12½ h 207.0 ;

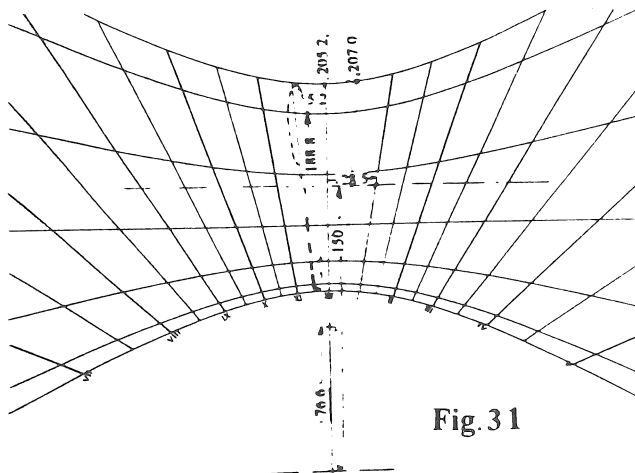


Fig. 31

C – Cálculo de los puntos de la lemniscata

Retardo fijo: $(1\text{h cada } 15^\circ = 4\text{m por grado}) = 24\text{m}$.

Se calcularán las coordenadas de las fracciones de hora equivalentes a: **la suma del retardo fijo más el valor de la ecuación de tiempo**, para los días del comienzo de cada signo del zodiaco.

Por ejemplo, para el 21 de Noviembre: $x = -5.2$; $y = 188.8$, según se marca en la figura.

Ejemplo de un reloj vertical declinante

Para el mismo lugar y longitud del estilo.

Sabemos que el día 16 de Septiembre, el Sol estaba justamente frente a la pared a las 2 h 50 m de la hora oficial de verano, es decir a las 12 h y 50 m, hora de tiempo universal (TU).

A – Cálculo de la declinación del muro.

En primer lugar, es necesario calcular la hora del paso del Sol por la meridiana, que será: 24m más la ecuación de tiempo (-5m), es decir: $24 - 5 = 19\text{m}$ después de las 12. La declinación del Sol ese día, según la fórmula [10], es de 2.8° . Aplicando la fórmula [3], se obtiene la declinación de la pared, $d = 12.6^\circ$ hacia el Oeste.

B – Valores de la subestilar

Según la expresión [4], la hora de la subestilar es $t_s = 76.9$ minutos. Aplicando la fórmula [5] se obtiene el valor angular b de la subestilar, que haciendo $y = 150$, la abscisa será: $x = 39.1$

El valor de c según la fórmula [6] será de 48.37° .

Tomando este valor de c como el ángulo que el estilo forma con el muro y conocido el valor t_s de la subestilar, se harán los demás cálculos como si se tratara de un reloj horizontal. Los ángulos b con relación a la vertical (línea de las 12) se calcularán con la fórmula [7], que ya tiene en cuenta la posición del eje de simetría.

El reloj presentará un aspecto muy semejante al de la figura 29.

RELOJES PROYECTIVOS

Luis Hidalgo

Generalidades

Por medio de la proyección de un reloj ecuatorial o de los círculos de la esfera celeste se pueden generar toda una serie de relojes que llamaremos **proyectivos**, en el intento de agruparlos en una serie de relojes poco habituales, algunos de ellos ya muy conocidos como son los llamados **analemáticos** de Foster-Lambert, Vaulezard, Parent y Oughthred.

De entre todos los posibles elegiremos aquellos que tienen el plano de proyección (PP) fácilmente identificables, tales como el plano horizontal, el polar, el meridiano o el vertical no declinante. El reloj vertical declinante lo consideramos, en principio, como un portátil. Incluiremos también los que tienen gran facilidad para su trazado, o porque son capaces de proporcionar la hora oficial.

El objeto de estas líneas es hacer un estudio de este tipo de relojes, utilizando métodos analíticos por su gran exactitud y facilidad de ejecución, en vez de usar construcciones gráficas. Añadiremos el cálculo de la longitud del estilo por ser esencial, pues la lectura se hace por la intersección de la sombra con la línea de referencia (recta o curva).

En lo que sigue llamaremos a la oblicuidad de la eclíptica $\epsilon = 23.44^\circ$, a la latitud del lugar $\phi = 40.4^\circ$ N (Madrid) y al radio R . Lg es la longitud mínima que debe tener el estilo, H_n y H_s son los horizontes Norte y Sur y QQ' es el ecuador celeste. El segmento Ef determina la mitad del desplazamiento en la escala de las fechas.

Las declinaciones del Sol δ para los días del comienzo de los signos del zodiaco, que determinarán el desplazamiento del estilo en la escala de fechas, son:

- 00° Aries (20-3) y Libra (23-9)- **equinocios**
- 11.48° Tauro (20-4) y Virgo (23-8)
- 20.15° Géminis (21-5) y Leo (23-7)
- 23.44° Cáncer (21-6)- **solsticio de verano**
- -11.48° Escorpio (23-10) y Piscis (18-2)
- -20.15° Sagitario (22-11) y Acuario (20-1)
- -23.44° Capricornio (22-12)- **solsticio de invierno**

Por supuesto que nada nos impide marcar en la escala de fechas intervalos de 10 días.

Clasificación

Estos relojes proyectivos se pueden agrupar de la siguiente forma:

- A) - Relojes derivados de un reloj ecuatorial proyectado según una **dirección de proyección (DP)** dada sobre un **plano de proyección (PP)** elegido, cuando tal dirección de dirección (DP) está en el plano meridiano
- B) - Relojes proyectados, como los anteriores, según una **dirección**, pero que está fuera del plano meridiano.
- C) - Relojes proyectados desde un **punto de proyección** sobre un plano (PP) dado.
- D) - Relojes derivados de la proyección de los **círculos de la esfera celeste** desde una dirección (DP), o un punto (P), sobre un plano (PP) elegido.

Cuadrantes del grupo A

Derivados de un ecuatorial proyectado según una dirección (DP) que está en el plano meridiano

En los relojes de este grupo, la esfera celeste sufre una proyección cilíndrica, de tal modo que la esfera está inscrita en un cilindro y es tangente en su plano ecuatorial. Podemos suponer que el Sol se mueve sobre la superficie del cilindro, con declinaciones δ entre los valores máximos ϵ y $-\epsilon$. En estas condiciones las variaciones de la declinación δ se transmitirán a un segmento, que determinará el desplazamiento del estilo en la semi-escala de las fechas (Ef), si procede.

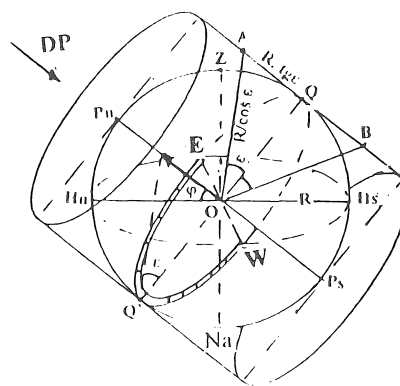


Fig. 1

Reloj ecuatorial. Fig.1. En este caso la dirección de proyección (DP) es el eje del mundo y el plano de proyección (PP) elegido es el ecuador celeste. El modelo clásico de reloj ecuatorial nos puede servir para familiarizarnos con el tema, puesto que es el fundamento de otros muchos. Es evidente que el cuadrante así obtenido es el propio ecuador y los puntos horarios están separados por ángulos de 15° .

El estilo está fijo en el centro O y su longitud mínima Lg será: $AQ = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$. De esta forma, cuando la declinación sea máxima ($\delta = \varepsilon$), la sombra del estilo será igual al radio del círculo ecuatorial.

Los dibujos que siguen, mantendrán la misma estructura con las mismas letras.

La distancia $OA = R / \cos \varepsilon$ y $AQ = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$ se utilizarán para los cálculos como datos básicos.

A-1) Cuadrante lineal horizontal. Denominado así porque tanto la escala de fechas como la de las horas están sobre líneas rectas y porque su plano de proyección (PP) es el horizonte local. La dirección (DP) de proyección es la del ecuador.

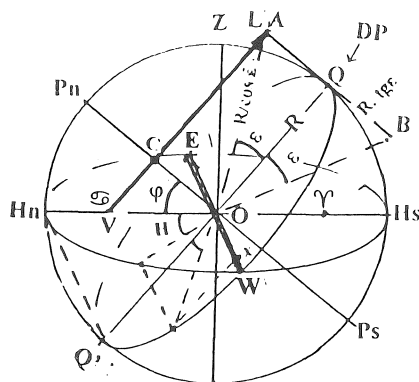


Fig. 2

En la figura 2 puede verse que los extremos de los radios del círculo del reloj ecuatorial se proyectan sobre la línea Este-Oeste (E-W), en que está la escala de las horas, a una distancia:

$OX = R \cdot \operatorname{sen} H$, siendo H el ángulo horario.

La escala de las fechas (Ef) está en la meridiana del lugar (Hn-Hs). Para los días de los equinoccios (21-marzo y 23-sept.) el estilo debe estar en el centro O y por tanto en el plano ecuatorial QQ'. En el solsticio de verano (21-junio), que corresponde a la declinación máxima ($\delta = \varepsilon$), el estilo ha de estar en el punto V.

Recalcamos que la inclinación del estilo sobre el horizonte Sur es paralelo a la dirección de proyección, es decir, forma con esta dirección un ángulo de $90^\circ - \varphi$.

Su distancia al centro O será: $OC = AQ = R \operatorname{tg} \varepsilon$ luego, Ef vale: $OV = R \operatorname{tg} \varepsilon / \cos \varphi$.

La longitud del estilo VL (VA) es tal que su sombra tocará en la línea E-W.

En el triángulo OVA, usando la ley de los senos, se tiene que: $VL / \operatorname{sen} (90 + \varphi - \varepsilon) = VO / \operatorname{sen} \varepsilon$.

Por tanto: $VL = R \cdot \cos (\varphi - \varepsilon) / \cos \varphi \cdot \cos \varepsilon =$
 $= R (1 + \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi)$

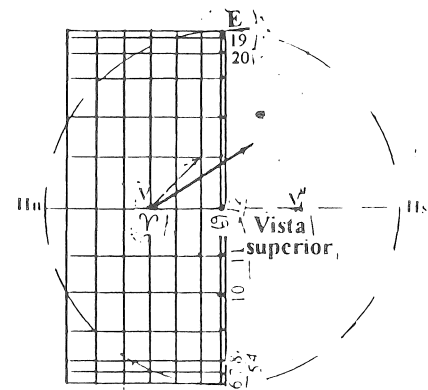


Fig. 3

Si se quiere evitar el inconveniente de tener que mover el estilo, típico de los relojes "analemáticos", basta con trazar perpendiculares a la línea Hn- Hs, por los puntos que corresponden al comienzo de los signos del zodiaco y por los puntos horarios perpendiculares a la línea Este-Oeste (E-W), con lo que se forma un retículo, como se puede apreciar en la figura 3, que es una vista superior del círculo horizontal. Es un artificio que deja fijo el estilo y desplaza la escala.

Esta es una variante, que llamaremos **reticular**, con la particularidad de una inversión de los signos del zodiaco.

La lectura de la hora se hará por interpolación visual. En la figura 3, la sombra del estilo está señalando las 13 horas, si la determinación se efectúa en la fecha en que el Sol entra en el signo de Géminis o de Leo.

Como característica curiosa, este tipo de cuadrante presenta el fenómeno de la retrogradación de la sombra y es capaz de marcar todas las horas de insolación posible del lugar. Merced a este fenómeno, por el que la sombra invierte su dirección, se le dota de las marcas de las horas 4-5 y 19-20, como se aprecia en la figura

Puesto que todo cuadrante se debe orientar correctamente, se le suele dotar de una brújula, mejor aún si es susceptible de poder corregir la declinación magnética.

En cuanto a su adaptación a otras latitudes, será preciso levantar el reloj del lado Sur cuando se traslade a otra latitud menor y del Norte cuando sea para una latitud mayor, de modo que en la nueva posición el ecuador del cuadrante en la nueva latitud y el ecuador celeste queden en el mismo plano.

A-2) Horologium Erectus. La dirección de proyección (DP) es la del ecuador y el plano de proyección es el primer vertical, es decir, el plano vertical ortomericiano. Fig. 4.

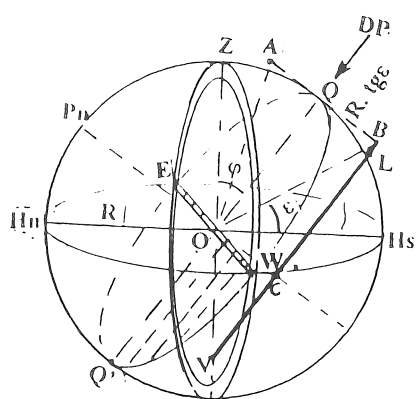


Fig. 4

Lo denominamos de esta manera por tener su estilo elevado, teniendo gran contraste con el cuadrante vertical convencional en el que está dirigido hacia abajo.

La línea de las horas está en la dirección E-W, como en el caso anterior, porque la dirección de proyección (DP) es paralela al ecuador QQ'. La escala de las fechas (Ef) está sobre el plano vertical, debiendo situarse el estilo en su parte inferior en el solsticio de invierno (21-diciembre). La distancia al estilo será: $OV = R \cdot \tan \epsilon / \sin \phi$ y la longitud mínima VL (VB) del estilo se calcula, de forma semejante al caso anterior, por la expresión: $R / \cos \epsilon / \sin \phi = VL / \sin (180^\circ - \epsilon - \phi)$.

$$VL = R \cdot \sin (\phi + \epsilon) / \sin \phi \cdot \cos \epsilon = R(1 + \tan \epsilon / \tan \phi)$$

Existe una similitud en el trazado con el anterior reloj y se comporta de la misma manera. La diferencia estriba en las horas de insolación, en las que, como todo reloj vertical que mire al Sur, las horas máximas serán 12, desde las 6 a las 18h.

Para adaptarlo a otra latitud mayor será necesario llevarlo hacia nosotros de la parte superior del cuadrante un ángulo igual a la diferencia entre las dos latitudes. Si la latitud del lugar es menor, lo empujaremos de la parte superior hacia delante una cantidad equivalente al ángulo de la diferencia de latitudes.

Naturalmente, como en el caso anterior, la iluminación cambiará por dos motivos: la iluminación está en función de la latitud y además, el plano de proyección ahora no es vertical sino reclinante o inclinado.

La obtención de los puntos horarios es la misma que en el cuadrante anterior, utilizando la función: $OX = R \cdot \sin H$. Podemos agregar que se podría dejar fijo el estilo y hacer un trazado reticular como en el caso A1, ya descrito.

Este cuadrante se obtendría indirectamente basándose en la equivalencia de planos, por la cual todo plano inclinado y declinante tiene su equivalente horizontal en un punto de la Tierra de latitud ϕ' conforme a la fórmula:

$\sin \phi' = \cos i \cdot \sin \phi - \sin i \cdot \cos \phi \cdot \cos d$,
siendo i la inclinación o pendiente y d la declinación del plano (no confundirla con la declinación δ del Sol).

Si hacemos que $i = 90$ y $d = 0$, esta fórmula se transforma en: $\sin \phi' = \cos \phi$ y por tanto: $\phi' = 90 - \phi = 49.6^\circ$. Así pues, todo se reduciría a trazar un reloj lineal horizontal para una latitud de 49.6° .

Teniendo en cuenta que está en el mismo meridiano pero en el hemisferio Sur, la progresión creciente de las horas en este nuevo punto austral lleva el sentido de las agujas del reloj. Al traerlo al punto de emplazamiento (Madrid) debe invertirse el sentido horario (contrario a las agujas del reloj). Lo mismo se actuará con respecto a los signos del zodiaco en la escala de las fechas, en la que habrá una inversión.

Este razonamiento se aplicará en aquellos casos en que la construcción gráfica sea poco demostrativa y habría que hacer varios abatimientos, por lo que la figura sería confusa y de difícil interpretación.

A-3) Cuadrante Foster-Lambert Norte Horizontal. La dirección de proyección (DP) es la bisectriz

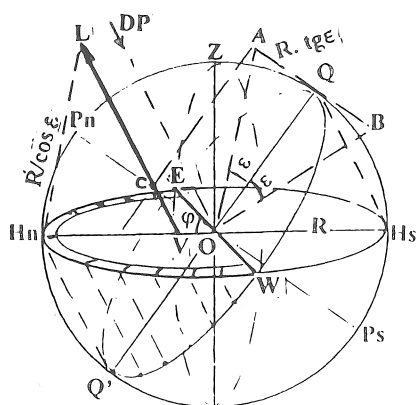


Fig. 5

del ángulo $(90^\circ - \varphi)$ formado por el Polo Norte (Pn) y el Zenit (Z). El plano de proyección elegido es el horizonte local. Fig. 5.

Lo interesante de esta proyección es que el ecuador es homólogo a su proyección. Observemos que la línea Q-Hs es paralela al estilo, que es la dirección de proyección (DP), por lo que la figura proyectada sobre el horizonte local es el propio ecuador, esto es, el mismo círculo ecuatorial, según se aprecia en la figura. Por esta condición, las horas están separadas uniformemente de 15 en 15 grados y al ser homogéneas se facilita mucho la conversión de la hora solar a la hora oficial.

La distancia $OC = AQ = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$ y el ángulo en C vale: $(90^\circ - \varphi) / 2$. Por tanto:

$$OV / \operatorname{sen} (90^\circ - \varphi) / 2 = OC / \operatorname{sen} (180^\circ - (90^\circ + \varphi) / 2).$$

La semi-escala valdrá: $OV = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} (90^\circ - \varphi) / 2$.

En el triángulo HnVL, se tiene:

$$HnL = OA = R / \cos \varepsilon. \text{ Por lo tanto:}$$

$$OA / \operatorname{sen} (90^\circ - \varphi) / 2 = LV / \operatorname{sen} (90^\circ - (\varphi - \varepsilon)).$$

$$\text{Luego: } LV = R \cdot \cos (\varphi - \varepsilon) / \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sen} ((90^\circ + \varphi) / 2).$$

Otra de las ventajas que conlleva este cuadrante es que capta las horas de iluminación máxima diurna para la latitud concebida y tiene una fácil ejecución.

A-4) Cuadrante Foster-Lambert en un plano vertical ortomeridiano. La dirección de proyección (DP) es la de la bisectriz del ángulo (φ) que el horizonte Sur (Hs) forma con el eje del mundo (Ps). Fig. 6.

También se cumple en este reloj que la proyección es homóloga con el ecuador.

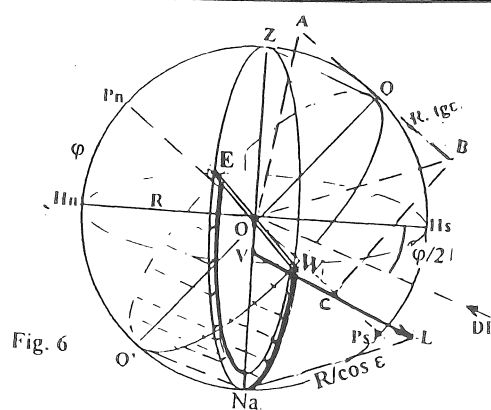


Fig. 6

En la figura 6 se puede ver que la recta ZQ es paralela al estilo. Por ello, las líneas horarias del reloj ecuatorial se proyectan en el círculo vertical con idénticos ángulos.

Como en los casos anteriores, la distancia OC es igual a $BQ = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$. El ángulo en C vale $\varphi / 2$ y el de V vale $90^\circ + \varphi / 2$.

$$\text{Luego: } OV / \operatorname{sen} \varphi / 2 = OC / \operatorname{sen} (90^\circ + \varphi / 2).$$

La semi-escala será: $OV = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi / 2$ y en el triángulo VLNa se tiene que:

$$VL / \operatorname{sen} (\varphi + \varepsilon) = NaL / \operatorname{sen} (90^\circ - \varphi / 2 - \varepsilon).$$

$$\text{El estilo VL será: } R \cdot \operatorname{sen} (\varphi + \varepsilon) / \cos \varepsilon \cdot \cos \varphi / 2.$$

Para más detalles, remitimos al lector al artículo "Un intrigante reloj", del boletín Analema (nº 7), en el que se trata el diseño de un reloj utilizando el método del plano **horizontal equivalente**, en otro punto del globo terrestre.

A-5) Cuadrante Foster-Lambert en un plano polar. La dirección de proyección hace un ángulo de 45° con el plano polar y el plano seleccionado es el mismo plano del eje del mundo. Fig. 7.

Al ser la dirección de proyección la bisectriz del ángulo formado por el eje del mundo y el ecuador,

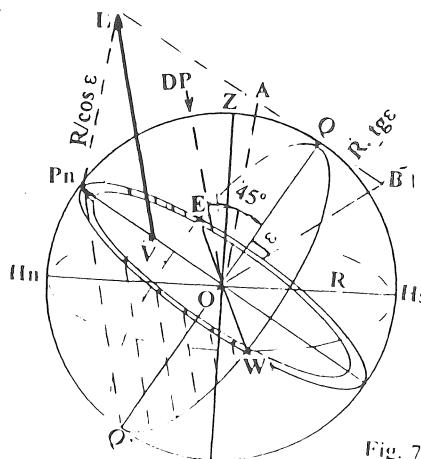


Fig. 7

la homología se conserva, pues son dos planos perpendiculares entre sí y por lo tanto la proyección del ecuador será el propio ecuador.

La semi-escala Ef será: $OV = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$.

La longitud del estilo se puede deducir de la expresión: $R \cdot (\cos \varepsilon - \operatorname{sen} \varepsilon) / \operatorname{sen} (45^\circ - \varepsilon)$ y por tanto, Lg valdrá: $VL = R / \operatorname{sen} 45^\circ$.

Tanto gráficamente como analíticamente el plano **horizontal equivalente**, estaría en el ecuador y en el mismo meridiano. Así pues, todo quedaría reducido a trazar un cuadrante Foster-Lambert horizontal en el ecuador (latitud: $\varphi' = 0$). Para poderlo utilizar en nuestra latitud, habría que elevarlo de la parte norte un ángulo igual a φ .

Nada nos impide diseñar un Foster-Lambert en el ecuador, pero para el hemisferio Sur. Es evidente que será simétrico especular al trazado con respecto al del hemisferio Norte, con lo que el cuadrante tendrá dos estilos perpendiculares entre sí y una circunferencia única; su mitad norte con la inscripción de las horas en el sentido horario y la mitad sur con la inscripción en el sentido antihorario. Ver figura 8.

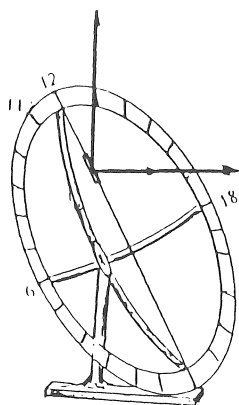


Fig. 8

El motivo de dotarlo de dos estilos es sólo por razón estética, porque gana en armonía.

Como el máximo de iluminación es de 12 horas, si se quieren captar las anteriores a las 6 o las posteriores a las 18, sólo sería necesario prolongar los estilos por la parte que mira al Nadir y numerar las horas en la cara inferior del cuadrante. La escala es única y la entrada de los signos es la misma.

Una de sus ventajas es el carácter universal que tiene este cuadrante, al que se le puede dotar un sistema para su adaptación a cualquier latitud.

A-6) Cuadrante equiangular de Gordon. La dirección de proyección (DP) es perpendicular al horizonte local y el plano de proyección (PP) forma un ángulo φ con la vertical. Fig. 9.

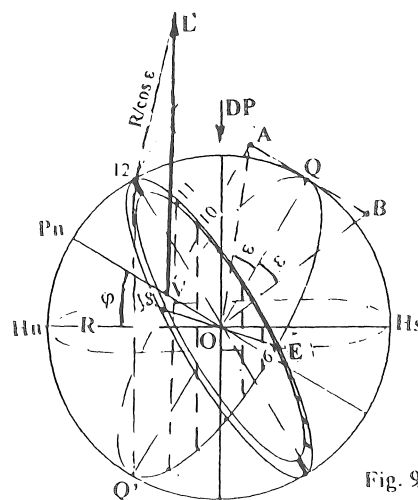


Fig. 9

Existe simetría entre el plano ecuatorial y el de proyección, pues lo son con relación a la vertical Z-O. Por tanto, las marcas de las horas están separadas 15 grados entre sí.

De forma semejante a los casos anteriores, la semi-escala de fechas Ef se obtiene por:

$OV / \operatorname{sen} (90 + \varphi) = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon / \operatorname{sen} \varphi$, y la longitud del estilo LV valdrá: $R \cdot \operatorname{sen} (2\varphi - \varepsilon) / \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sen} \varphi = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon / \operatorname{tg} \varphi$

Es interesante conocer las horas de iluminación máxima en este cuadrante. Por ejemplo: en un punto de latitud $40,4^\circ$ (Madrid) el día 21 de Junio para inscribirlas en el cuadrante de una forma adecuada.

El cálculo sería el siguiente. El ángulo horario para ese día del solsticio de verano, en el orto y en el ocaso, será: $\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$.

Luego $H = 111,65^\circ = 7,44h = 7h 26m 36s$.

La hora del orto en Madrid será: $12 - 7h 26m 36s = 4h 33m 24s$ y para el ocaso: $19h 26m 36s$.

Para el plano escogido, de inclinación $49,6^\circ$, es equivalente a uno horizontal en un punto del hemisferio cuya latitud φ' es igual a la diferencia entre la inclinación y la latitud ($9,2^\circ S$). El ángulo horario para el orto-ocaso, en ese día ($\delta = 23,44^\circ$, $\varphi' = 9,2^\circ S$) será: $\cos H = \operatorname{tg} 23,44 \cdot \operatorname{tg} 9,2$; $H = 85,97^\circ = 5h 43m 53s$, luego el orto será a las: $12h - 5h 43m 53s = 6h 16m 7s$;

momento preciso en que empezará a iluminarse el plano elegido y terminará la iluminación cuando se produzca el ocaso en el cuadrante horizontal, situado en el punto de latitud $9,2^{\circ}\text{S}$ a las:

$$12\text{h} + 5\text{h } 43\text{m } 53\text{s} = 17\text{h } 43\text{m } 53\text{s}.$$

Se podría adaptar a otra latitud como en casos anteriores, aunque es evidente que el estilo no permanecería perpendicular al nuevo horizonte y la iluminación sería diferente.

A-7) Foster-Lambert Sur Horizontal. La dirección de proyección (DP) coincide con la bisectriz del ángulo, $90^\circ - \varphi$, formado por el ecuador y el horizonte. El plano de proyección (PP) es el horizonte. Fig.10.

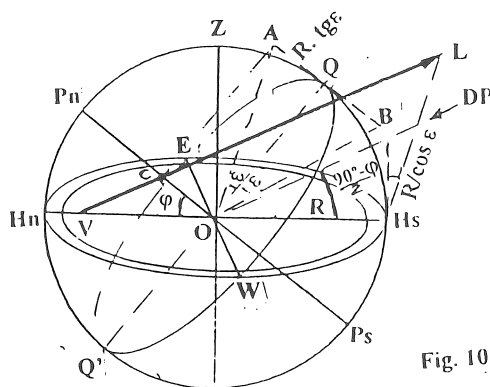


Fig. 10

Según se puede ver en la figura, la escala de desplazamiento es muy grande comparada con el radio R , y la longitud del estilo es casi dos veces y media la del radio, lo que le da un aspecto estéticamente poco atractivo. Sin embargo, combinado con otros relojes y mediante un artificio, puede ser más armónico.

Los planos del reloj ecuatorial (OQ) y el del horizonte (OHs) son simétricos con relación a la línea O-DP, por tanto, las rectas horarias de este reloj también distarán 15° entre sí.

En el triángulo OCV, se tiene:

$$OC / \text{sen } (90^\circ - \varphi) / 2 = OV / \text{sen } (180^\circ - (90^\circ + \varphi) / 2).$$

Luego la semi-escala Ef valdrá:

$$OV = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon / \operatorname{tg} (90^\circ - \varphi) / 2.$$

En el triángulo VLHs se tiene que:

$$LHs / \sin (90^\circ - \varphi) / 2 = VL / \sin (90^\circ + \varphi - \varepsilon).$$

La longitud L_g del estilo será:

$$VL = \bar{R} \cdot \cos (\varphi - \varepsilon) / \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sen} (90^{\circ} - \varphi) / 2.$$

También se puede situar otro estilo, perpendicular al anterior orientado hacia el Norte en vez de al Sur y que esté situado en el mismo punto V.

A-8) Reloj analemático de Vaulezard. La dirección de proyección (DP) es la del Cenit (Z) perpendicular al horizonte, que es el plano de proyección (PP). Fig.11.

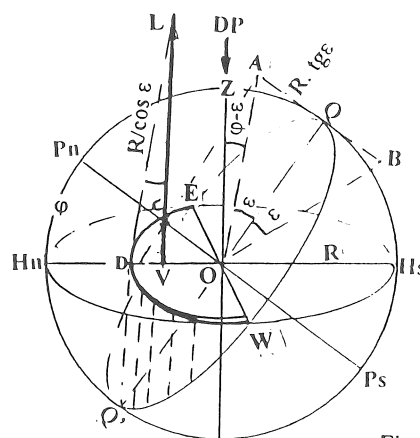


Fig. 11

El círculo ecuatorial QQ' proyectado se transforma en una elipse cuyo eje menor será:

$OD = R \cdot \text{sen } \varphi$, según se muestra en la figura.

Los puntos horarios se inscriben en la elipse, según el acimut real (ac) en los equinoccios:

$$\operatorname{tg} \alpha_c = \operatorname{tg} H / \operatorname{sen} \varphi.$$

La semi-escala $OV = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \cos \varphi$. La longitud

Lg del estilo será: $VL = R \cdot \cos (\varphi - \varepsilon) / \cos \varepsilon$.

Justificamos este ejemplo, pues creemos que todos libros modernos incluyen un estudio de este cuadrante.

A-9) Forter- Lambert Norte y Sur, combinado con el analemático de Vaulezard. Reloj combinado, agregando al anterior dos cuadrantes del tipo Forter- Lambert (párrafos A-3 y A-7). Fig.12.

La característica principal es la de ser auto-orientable porque tiene dos sistemas diferentes de

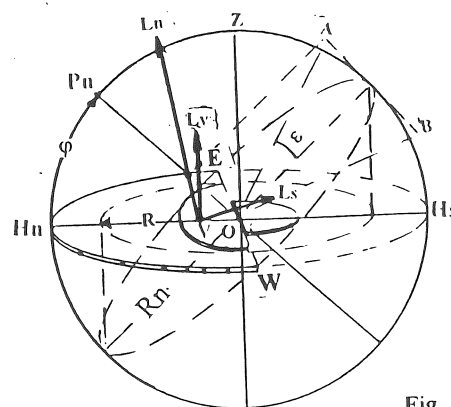


Fig. 12

medir la hora. Por otra parte, como se ha comentado antes, el cuadrante Foster- Lambert Sur le hace más estético y agradable a la vista.

Partimos del supuesto que el radio R de referencia es el del analemático de Vaulezard.

Los tres relojes han de tener una escala única y la misma entrada de los signos del zodiaco, siendo el valor del analemático igual a: $Ef = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \cos \varphi$.

Si se igualan las longitudes de las escalas, lógicamente tienen que variar los radios R_n y R_s de los otros círculos. Se calculan en función de R.

$$Ef = R_n \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} (90 - \varphi)/2 = R_s \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} (90 + \varphi)/2$$

Los puntos horarios de ambos Foster- Lambert, como se ha visto, son homogéneos, separados igualmente cada 15° , según muestra la figura 12.

A-10) Cuadrante de Vaulezard en un plano vertical ortomeridiano. La dirección de proyección (DP) es perpendicular al plano vertical de proyección. Fig.13.

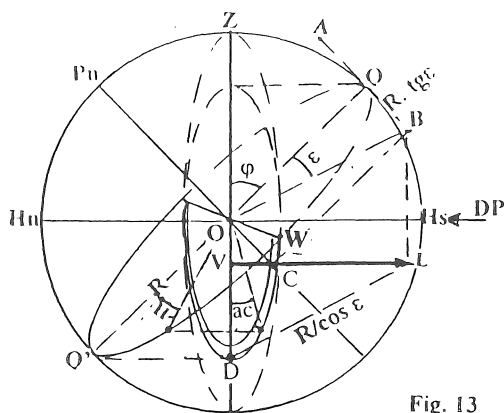


Fig. 13

El cuadrante ecuatorial al proyectarse sobre el plano vertical genera una elipse, cuyo eje menor es $OD = R \cdot \cos \varphi$, sobre la que estarán las marcas horarias ($\operatorname{tg} ac = \operatorname{tg} H / \cos \varphi$).

La semi-escala Ef se deduce de la figura siendo:

$$OV = QB \cdot \operatorname{sen} \varphi = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{sen} \varphi, \text{ y } OD = R \cdot \cos \varphi$$

En el triángulo VLD, la longitud del estilo Lg será: $VL = R \cdot \operatorname{sen}(\varphi + \varepsilon) / \cos \varepsilon$.

Se llega a los mismos resultados, si consideramos la equivalencia de los planos y se trazan en el punto equivalente, un cuadrante de Vaulezard horizontal, que al colocarlo en el punto de latitud habría que invertir el sentido de rotación de las horas y la entrada de los signos del zodiaco. El

número de las horas está limitado al intervalo de las 6 a las 18.

A-11) Cuadrantes Foster- Lambert combinados en un plano vertical ortomeridiano. Se trata de la combinación de dos cuadrantes cuyos estilos son perpendiculares. Fig. 14.

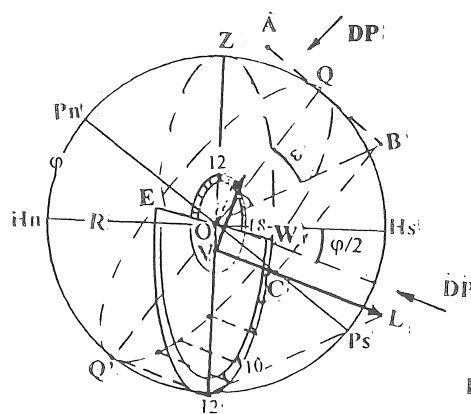


Fig. 14

En el párrafo A-4 se describió un cuadrante cuya semi-escala $OV = R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi/2$. Ahora se trata de añadir en el punto V otro estilo con una dirección (DP) perpendicular, que formará con la vertical un ángulo de $\varphi/2$. Para este nuevo estilo el radio será distinto porque: $OV = R' \cdot \operatorname{tg} \varepsilon / \operatorname{tg} \varphi/2$, la razón entre radios será: $R' = R / \operatorname{tg}^2 (\varphi/2)$.

$$\text{Lg del estilo inferior: } R \cdot \operatorname{sen}(\varphi + \varepsilon) / \cos \varepsilon \cdot \cos \varphi/2$$

$$\text{Lg del estilo superior: } R \cdot \operatorname{sen}(\varphi + \varepsilon) / \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sen} \varphi/2$$

Si se ha incluido esta combinación es por explorar todas las posibilidades y por puro "divertimento", pues en realidad no presenta ninguna ventaja sobre los casos anteriores.

A-12) Reloj triestilar, combinación de dos Foster-Lambert, Norte y Sur, con un analemático de Vaulezard, en un plano polar. Fig. 15.

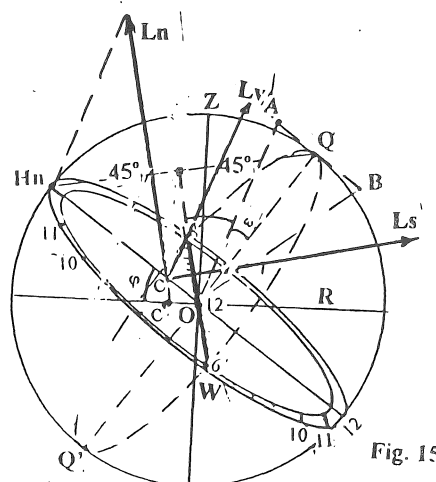


Fig. 15

Si el cuadrante anterior sólo consistía en un ejercicio matemático, éste ofrece ventajas sustanciales. Como es un reloj auto-orientable, no precisa brújula, porque tiene dos sistemas distintos de medida del tiempo. Cuando ambos relojes, analemático y Foster- Lambert, señalen la misma hora es que estarán automáticamente orientados.

También es universal, al ser adaptable a cualquier latitud, es de gran sencillez en su trazado que queda reducido a una circunferencia y dos líneas y por si fuera poco, permite la facilidad de convertir la hora solar en hora oficial, pudiendo coincidir ambas en el cuadrante. Todas estas características le confieren su carácter práctico.

En el apartado A-5 se ha hecho referencia a los Foster- Lambert en un plano polar. Se comentó entonces que; un plano cuya inclinación sea φ , tiene otro plano equivalente horizontal en el ecuador, en el que $\varphi' = 0$.

Si trazamos un cuadrante analemático de Vaulezard (A-8) en el ecuador, la elipse (proyección ortogonal del ecuador) se convierte en una recta E-W, sobre la cual van inscritas las horas. Ver figura 16.

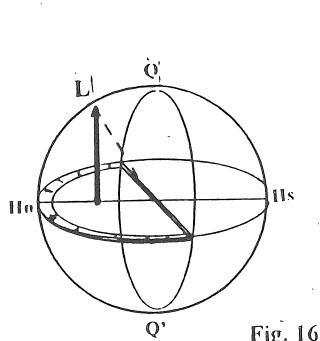


Fig. 16

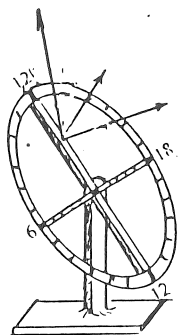


Fig. 17

La semi-escala de fechas es común a ambos relojes ($R \cdot \tan \epsilon$) y con las mismas entradas de los signos del zodiaco.

Las horas estarán inscritas en el eje mayor y la separación tendrá el valor de: $R \cdot \sin H$, siendo H el ángulo horario, a ambos lados de la línea de las 12 horas. Ver fig.17.

A-13) Cuadrante elíptico horizontal. La dirección de proyección (DP) es la del eje del mundo y el plano seleccionado es el horizonte local. Fig. 18. Los puntos horarios se inscriben sobre una elipse, cuyo semi-eje mayor vale: $R / \sin \varphi$ y el menor R .

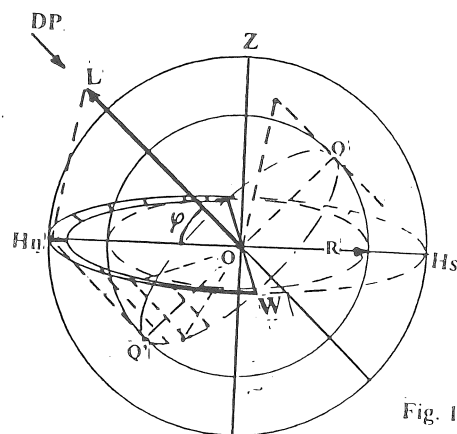


Fig. 18

La longitud del estilo fijo es:

$$LO = R \cdot \cos (\varphi - \epsilon) / \cos \epsilon \cdot \sin \varphi.$$

Se diferencia del reloj horizontal direccional a estilo polar en que las marcas de las horas están sobre una elipse y que carece de líneas horarias, que partiendo de los puntos horarios van a confluir en el polo del reloj. Las horas se marcan sobre la elipse según coordenadas cartesianas donde:

$$x = R \cdot \sin H, y = R \cdot \cos H / \sin \varphi.$$

A-14) Cuadrante elíptico vertical ortomeridiano.

La dirección (DP) es también el eje del mundo y el plano de proyección (PP) es vertical. Fig.19.

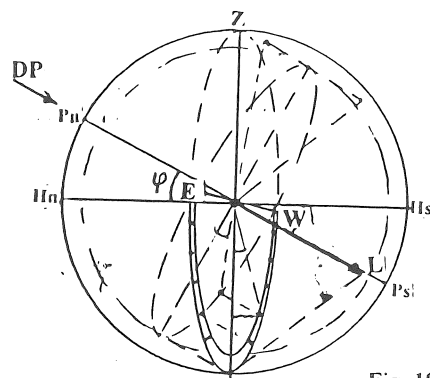


Fig. 19

Lg del estilo: $LO = R \cdot \sin (\varphi + \epsilon) / \cos \epsilon \cdot \cos \varphi$.

Semi-eje mayor: $R / \cos \varphi$

$$x = R \cdot \sin H, y = R \cdot \cos H / \cos \varphi.$$

Cuadrantes del grupo B.

Relojes derivados de uno ecuatorial, proyectados según una dirección de proyección (DP) que está fuera del plano meridiano.

B-1) Cuadrante de Parent, combinado con un oriental-occidental a estilo polar. La dirección de proyección (DP) es ortogonal al plano meridiano, que es su plano de proyección (PP). Fig.20.

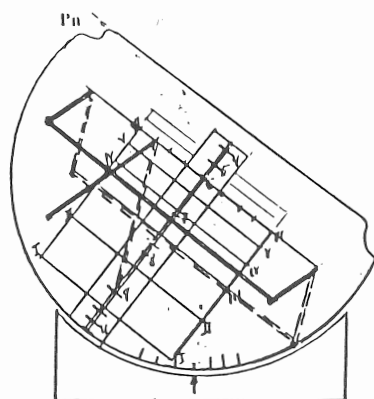


Fig. 20

Intuitivamente se aprecia que, todo plano vertical meridiano tiene su equivalente horizontal en el ecuador ($\varphi' = 0$). La longitud λ' difiere en 90° , equivalente a 6 horas, por cada cara.

El plano vertical meridiano de Madrid tiene dos puntos en el ecuador en los que hay un equivalente horizontal. La cara oriental tiene su equivalente horizontal en Ceylan, $\varphi' = 0$, y λ' con 6 horas más que Madrid. La cara occidental tiene su equivalente horizontal en las Islas Galápagos, $\varphi' = 0$, y λ' con 6 horas de diferencia con Madrid.

Si trazamos un analemático de Vaulezard en el ecuador como el del apartado A-12 y le giramos un ángulo ϕ , los planos de ambos relojes quedarán superpuestos, como si estuvieran calcados.

El reloj de Parent tiene el inconveniente de que no se marcan las horas en los equinoccios, porque la sombra del estilo cae a lo largo de la línea horaria. Para evitar esto, se le ha agregado un reloj direccional, que además le hace auto-orientable, lo que le hace comportarse como una auténtica brújula solar, orientándonos en el espacio y el tiempo.

Si se le dota de una escala circular de latitudes, como se muestra en la figura 20, se puede comportar como universal y por disponer de dos caras simétricas es capaz de señalar todas las horas de insolación.

El único inconveniente que presenta el conjunto es la dificultad de lectura en las horas centrales del día, como se aprecia en la figura.

B-2) Cuadrante Foster-Lambert combinado con un direccional oriental-occidental a estilo polar en el plano meridiano. La dirección de proyección (DP) es perpendicular al plano meridiano y el plano de proyección es el propio meridiano. Fig.21.

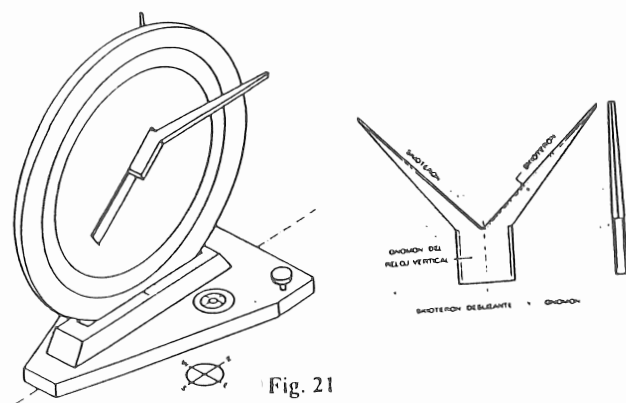
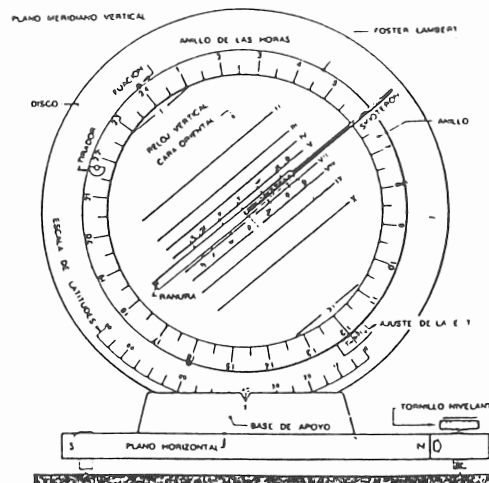


Fig. 21



Para el cálculo debemos seguir el mismo razonamiento anterior, con la salvedad de que en vez de diseñar un analemático, se hará un Foster-Lambert, con lo que habrá desaparecido la dificultad de lectura de las horas centrales, puesto que los puntos horarios están sobre un círculo y separados por ángulos iguales de 15° . Además, al ser homogéneas las horas es muy fácil obtener la hora oficial.

En resumen, parece ser el más idóneo y práctico de todos los proyectivos, reuniendo el conjunto una serie de cualidades; como la facilidad de ejecución, captación de todas las horas de insolación, universalidad, auto-orientación, lectura cómoda y conversión de la hora solar en oficial, pudiendo contener a ambas en el mismo cuadrante. Para más detalles ver Analema nº 8.

Cuadrantes del grupo C.

Relojes proyectados desde un punto de proyección sobre un plano elegido.

C-1) Reloj doble horizontal de Wiliam Oughthred.
Fig. 22.

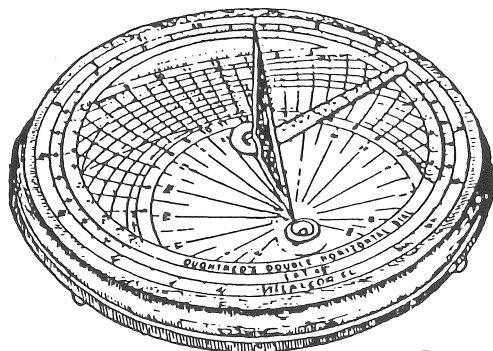


Fig. 22

Se trata de la combinación de un reloj convencional horizontal de estilo polar con otro de proyección estereográfica, cuyo punto de proyección es el cenit y el plano de proyección es el horizonte. Por lo que se le ha llamado astrolabio horizontal.

Al combinar dos sistemas de medida diferentes (acimut y ángulo horario), se convierte en auto-orientable cuando se lea la misma hora, en cada cuadrante.

Además de señalar la hora en cualquier momento del día, nos proporciona la hora y orientación del orto y del ocaso, duración del día, lugar del Sol en la eclíptica, etc. Todos ellos son datos astronómicos de gran interés.

Se calcula la longitud mínima del gnomón perpendicular al plano y la del estilo polar, para que con una sola placa triangular sirva a los dos relojes. Para más detalles ver el artículo de Analema nº 11.

El cálculo se basa en la expresión:

$Lg = R (\cos \epsilon - \cos \varphi) / \operatorname{tg} (\varphi - \epsilon) (\sin \varphi + \sin \epsilon)$,
equivalente a: $Lg = R \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \epsilon) / \operatorname{tg} (\varphi - \epsilon)$.

Distancia al polo del cuadrante horizontal, desde el centro: $R \operatorname{tg} (\varphi - \epsilon) / 2 / \operatorname{tg} (\varphi - \epsilon) \cdot \operatorname{tg} \varphi$.

Cuadrantes del grupo D.

Relojes derivados de la proyección de los **círculos de la esfera** desde una dirección o un punto sobre un plano determinado.

D-1) Proyección ortográfica de los círculos de la esfera sobre un plano horizontal dado. Siendo la dirección de proyección desde el cenit sobre un plano horizontal. Fig. 23.

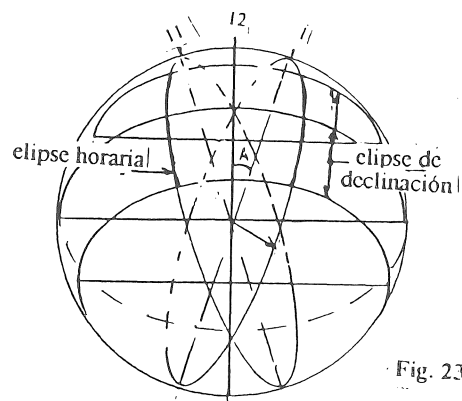


Fig. 23

En este caso no existe proyección centrográfica cilíndrica como en los ejemplos antes analizados, por lo cual el gnomón permanece fijo.

Se podría admitir como una variante del analemático de Vaulezard en el que, al no haber la proyección sobre el cilindro, las elipses son diferentes, lo que complica bastante el trazado.

Recordemos que los analemáticos se pueden construir también como cuadrantes con estilo fijo, con sólo desplazar las líneas, círculos o elipses de referencia horaria, la misma longitud que lo hace el estilo móvil, como el "reticular", que ya vimos antes.

En el analemático de Vaulezard, existe esa previa proyección cilíndrica con lo cual al proyectarla, los círculos de la declinación del Sol son exactos a la magnitud del ecuador, por lo tanto sus proyecciones son elipses iguales. Si a esta dificultad en el trazado de las elipses de declinación se suma la de las horarias, aunque éstas son iguales, evidentemente (los meridianos son círculos máximos) nos daremos cuenta de la simplicidad del cuadrante de Vaulezard.

La longitud del estilo es: $Lg = R \cdot \cos (\varphi - \epsilon)$.

Elipses de declinación:

Semi-ejes mayor: $R \cdot \cos \delta$, el menor: $\cos \delta \cdot \sin \varphi$

Centros: $R \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta$

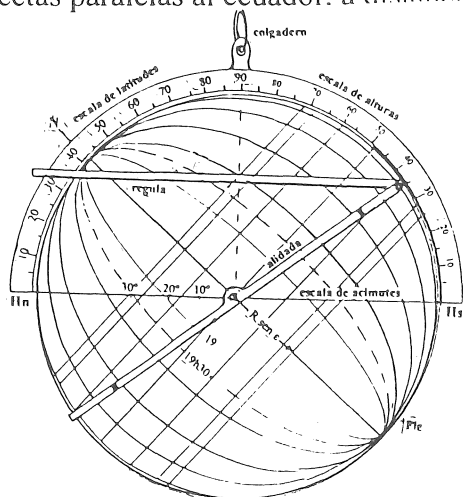
Elipses horarias: Polos = $R \cdot \cos \varphi$

Semi-eje mayor: R , el menor: $R \cdot \cos \varphi \cdot \sin H$.

Acimutes: $\operatorname{tg} ac = \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} H$

D-2) Proyección de los círculos de la esfera sobre el plano meridiano. Fig. 24.

Al proyectar ortográficamente los círculos de declinación solar sobre dicho plano, se convierten en rectas paralelas al ecuador, a distancias ($\text{sen } \delta$).



Los meridianos se proyectan como elipses que pasan por los polos N y S con el mismo eje mayor (2R) y el eje menor según el valor de ($\text{sen } H$).

En estas condiciones podemos conocer la hora del orto y del ocaso, pues sólo se necesita seguir visualmente la línea de declinación solar de acuerdo con el día de la determinación, hasta que toque al horizonte; el punto de encuentro estará sobre, o entre, las elipses horarias. También, siguiendo el mismo proceder se podrá saber la hora de paso por el **primer vertical**, cuando la línea de declinación solar corte a la línea imaginaria OZ (cenit), el punto de encuentro caerá sobre, o entre, las elipses horarias.

Si a la proyección se le agrega una escala graduada de 0 a 90° (escala de latitudes), la posición que está en el dibujo para la latitud 40,44° puede adaptarse para otra cualquiera, para otro punto de la Tierra. La continuación de esta escala de latitudes nos puede servir para la medición de la altura solar, que llamaremos escala de alturas.

Solamente nos queda añadirle una alidada o sistema de pínulas para que el rayo de sol las atraviere y nos dé la medida en la escala específica. Con la "régula" la trasladamos paralela al horizonte hasta que corte a la línea de declinación; el punto de encuentro señalará la hora en las elipses horarias. Se hará notar que estando acoplado a la latitud de trabajo, sin necesidad de utilizar la alidada, las líneas de declinación nos darán la altura máxima para ese día, es decir, la altura que alcanza el Sol a mediodía, cuando

culmina o pasa por el meridiano. Finalmente, si el horizonte se gradúa en función de $\text{sen } H$ (ángulo horario) podemos conocer la amplitud ortiva y occidua sin usar la alidada ni la "régula".

Si queremos conocer el acimut instantáneo a una hora determinada, con la ayuda de la regla en el punto horario pondríamos el borde fiducial de la "régula" y lo llevamos paralelo a la línea que une el eje de giro con el colgadero. Ahora, el borde fiducial nos indicaría el acimut instantáneo en la escala del horizonte.

Para más claridad pongamos un ejemplo. La latitud de utilización es como siempre 40,4° (Madrid) y la fecha de 21 de Junio. Se ajustará el índice a la graduación 40,4° en la escala de latitudes y se fijará su posición con el tornillo prisionero, con lo que la esfera del reloj quedará solidaria con la escala de latitudes y la altura. En esta posición, sin utilizar ni la alidada ni la regla, sólo con seguir con la vista la línea de declinación correspondiente al comienzo del signo de Cancer ($\delta = 23,44^\circ$), observaremos que corta al horizonte en un punto que coincide con la elipse de las 7 h 30m (p.m.) o 19 h 30m. El cálculo nos arroja un valor de 19 h 26m 36s, hora del ocaso. La hora del orto para ese día es el mismo punto y la misma elipse 4 h 30m (4 h 33m 24s por el cálculo).

Por ende, conoceremos la duración de la insolación; 15 horas (14 h 53m 12s). Ese mismo punto en la escala del horizonte señala 30°, lo que nos indica que la amplitud ortiva-occidua es ese valor, o sea que el Sol sale y se pone por un punto del horizonte separado por un ángulo de 30° al Norte de la línea E-W (primer vertical), (por el cálculo $31^\circ 29' 23''$). Si a esos 30° se le suman 90° tendremos el acimut contado desde el horizonte Sur de ese momento 120° (por el cálculo se obtiene $121^\circ 29' 23''$).

Si continuamos la observación, nos daremos cuenta que la línea de declinación corta a la línea imaginaria eje de rotación-colgadero, en la elipse de las 4 h de la tarde y 8 h (15 h 57m 24s y 8 h 2m 36s), hora de paso por el primer vertical.

La sombra de cualquier objeto vertical cae en ese momento sobre la dirección E-W y adicionalmente nos orienta espacialmente.

Si seguimos con la observación y nos vamos con la vista hacia la escala de alturas, vemos que la línea de declinación corta a dicha escala en la graduación 73° , que representa la altura máxima del Sol en el momento de la culminación, momento del mediodía en que el Sol pasa por el meridiano de Madrid ($73^\circ 2' 24''$).

Los datos obtenidos se han conseguido en la posición de trabajo, sin intervención de la alidada y la régula.

Ahora deseamos conocer la hora a través de la altura del Sol en un instante dado de ese día. Con el colgadero suspendido, dirigimos la alidada de tal forma que el rayo de sol entre a través de las pínulas o similares, con lo que se obtiene la altura en la escala de alturas.

Supongamos que la altura del Sol en el momento de la determinación en la escala de las alturas nos da un valor de 38° . Fijamos la alidada en ese punto y extendemos la "régula" de tal modo que la línea de referencia de ésta toque el punto 38° de la escala de latitudes, con lo que la "régula" estará inevitablemente paralela al horizonte N-S; ahora, cortará a la línea de declinación en un punto que estará sobre (o entre) las elipses horarias y en este caso está sobre la elipse de las 4h (p.m.) y 8h.

La solución es ambivalente pero a la hora practica tal no se produce. Si nos pidieran el acimut instantáneo para esa hora sólo tendríamos que bajar por medio del borde fiducial de la "régula" o perpendicular al horizonte y leer en la escala de éste el acimut.

En el ejemplo anterior, como precisamente estaba pasando por el primer vertical, su acimut es 90° (línea E-W).

La altura según el cálculo es de $37^\circ 51' 42''$ en vez de los 38° aparecida en la escala de altura. Los errores son lógicos y se deben a la apreciación subjetiva, a los derivados de la mecánica y a la propia naturaleza del cuadrante, que jamás nos puede dar las décimas de segundo de arco, como es comprensible, pero para los efectos prácticos es más que suficiente. La idea está basada en el astrolabio de Rojas con ligeras modificaciones para adaptarlo a un reloj solar de altura.

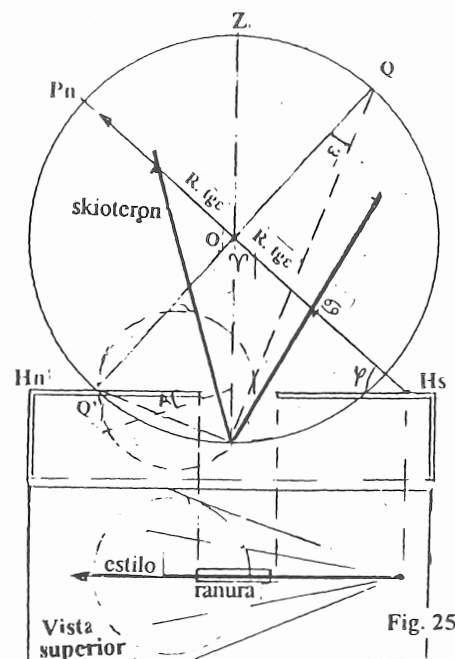
D-3) Relojes derivados de la proyección de los círculos de la esfera desde una dirección o punto de proyección sobre un plano determinado.

Reloj pendular de M. Lombardero. Fig.25. Descrito en nuestro boletín ANALEMA nº 3 bajo el título "Relojes analemizantes".

Se trata de un reloj proyectivo, en el que el círculo ecuatorial y el segmento $R \cdot \tan \epsilon$ sufren una proyección estereográfica, desde el Nadir, sobre el horizonte y en el plano meridiano.

Como sucede en toda proyección estereográfica, los círculos de la esfera son proyectados como otros círculos, por lo que el círculo ecuatorial se proyecta como otro círculo que llamaremos de referencia y en el que van insertas las horas.

El segmento $R \cdot \tan \epsilon$ se proyecta también desde el mismo punto sobre el horizonte, creando en él la



escala de desplazamiento según las fechas del estilo móvil, que el autor llama "Skioteron", el cual oscila o **pendula** de un extremo a otro de la escala en el transcurso del año, de forma similar, aunque de manera más lenta, que un "metrónomo".

Este reloj es un combinado de un reloj horizontal direccional a estilo polar (el clásico reloj de jardín) con uno proyectivo triple. Una previa proyección centrográfica cilíndrica está seguida de una proyección ortográfica del segmento $R \cdot \tan \epsilon$ sobre el plano meridiano y por último, hay una tercera

proyección estereográfica, desde el Nadir, de este segmento sobre el horizonte.

Estudio analítico.

Se debe tener en cuenta que, a diferencia del astrolabio horizontal de "Oughthred", sólo se proyecta el círculo ecuatorial y el segmento $R \cdot \text{tg } \varepsilon$ generando un estilo móvil, en contraste con el de aquel autor, que permanece fijo. También es de resaltar que las oscilaciones del estilo, o lo que es lo mismo, las divisiones de la escala de fechas en la entrada de los signos del zodiaco tampoco son iguales.

El radio de la circunferencia horaria será:

$$r = R/2 \cdot [\text{sen } \varphi + (1 - \cos \varphi)] \cdot \text{tg } \frac{1}{2} \varphi$$

Horas: se calculan a través del acimut en los equinoccios ($\delta = 0$) según la fórmula:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } H / \text{sen } \varphi, \text{ siendo } H \text{ el ángulo horario.}$$

Longitud mínima del skioterón:

$$L_g = R \cdot \sqrt{1/\cos^2 \varepsilon + 2 \cdot \text{tg } \varepsilon \cdot \text{sen } \varphi}.$$

Escala de fechas: A título de ejemplo se calcula la longitud de la escala entre los solsticios de verano (21 junio) y de invierno (22 dic.).

Nos valdremos de los ángulos α y β que corresponden al verano y al invierno:

$$\text{sen } \alpha = \text{tg } \varepsilon \cdot \cos \varphi / \sqrt{1/\cos^2 \varepsilon + 2 \text{tg } \varepsilon \cdot \text{sen } \varphi}.$$

$$E_f = R (1 - \cos \varphi) \cdot \text{tg } \alpha, \text{ (solsticio de verano).}$$

$$\text{sen } \beta = \text{tg } \varepsilon \cdot \cos \varphi / \sqrt{1/\cos^2 \varepsilon - 2 \text{tg } \varepsilon \cdot \text{sen } \varphi}.$$

$$E_f = R (1 - \cos \varphi) \cdot \text{tg } \beta, \text{ (solsticio de invierno).}$$

Para las declinaciones intermedias, que corresponden a las entradas en los signos del zodiaco, se usarán en las fórmulas, δ en vez de ε .

Se hace notar que para un radio $R = 7,5$ cm, la longitud total de la escala de fechas será: $E_f = 1,27$ cm, cifra relativamente pequeña, en la que es difícil grabar las marcas de la entrada de los signos, máxime siendo asimétricas.

Se añade como comentario aparte, que si al cuadrante descrito se le agrega otro horizontal a estilo polar (el clásico de jardín), se conseguirían ventajas sustanciales.

El conjunto se convertiría en "auto-orientable", que puede prescindir del uso de la brújula. Cuando las sombras proyectadas por el estilo polar y por el skioterón marquen la misma hora, el conjunto estará orientado, ya que partimos de dos medidas

diferentes: el ángulo horario y el acimut o pseudo-acimut.

Si el skioterón se desplaza sobre el estilo polar en la magnitud $R \cdot \text{tg } \varepsilon$; resulta que es simétrica, es más fácil calcular y es mayor que la escala E_f horizontal. Así, habremos conseguido precisión y rapidez en la colocación del "skioterón", haciendo innecesario de esta manera un engorroso cálculo.

El cuadrante dispone de dos estilos: el clásico y el que se denomina pendular. En realidad, este cuadrante no aporta nada esencial, como muchos de los aquí descritos.

En resumen, se ha procurado hacer un estudio analítico de los relojes conocidos hace centurias, dotarlos de un cálculo de la longitud mínima de los estilos. Aunque estoy en parte con el dicho latino "sub sole nihil novus", en este estudio hay novedades, que si en parte no representan un sentido práctico, al menos constituyen un ejercicio matemático.

Antes de finalizar estas notas, un tanto discutibles y discutidas que suponen una ruptura del sentido conservador que se tiene de la gnomónica clásica decimonónica, un tanto candorosa e ingenua, deseamos que sirvan para rendir un homenaje póstumo a mi estimado amigo y admirado maestro Jaime Velilla Moros, que con su solvencia técnica y estilo sereno supo cultivar los aspectos más recónditos de esta ciencia, siempre motivado por su insaciable curiosidad, explorando los aspectos más desconocidos, legándonos unas notas inéditas, ejemplo de sus proyectos inagotables, escritas con un espíritu crítico y creativo, pletóricas de madurez intelectual, marcadas por su seriedad analítica y sobre todo tan didácticas que nos han inspirado, influido y estimulado y cuya lectura supone un motivo de deleite, quedando atrapados por su germen prolífico y siempre cautivados por la trayectoria de su buen hacer.

Que estas humildes líneas, más o menos hilvanadas, sirvan como justificación del tributo de recuerdo y honra a su memoria.

Dr. Luis Hidalgo

COMENTARIO SOBRE ...

Artículo sobre una exposición de relojes de sol.

Nuestro socio Andrés Majó Díaz celebró una exposición de relojes de sol en la Peña Filatélica de Vilanova i Geltrú, el pasado mes de mayo. Presentó su colección de 200 azulejos con relojes de sol, distribuidos en 20 paneles, ocupando 20 metros lineales; siendo muy admirada por la novedad del tema. Colaboró en la misma, el señor Jaume Salichs con sus esculturas de relojes de sol y fotografías de los realizados en diferentes edificios. Se dió una conferencia sobre el tema, salpicada de varias anécdotas, siendo muy aplaudida la intervención. Al finalizar la misma se sirvieron unas copas de cava por ser la región del mismo.

M.J.H.M.

En el cd-rom que ha puesto a la venta la North American Sundail Society dedicada a los más importante que han efectuado sus socios desde su fundación han incluido el "Catálogo de sellos con relojes de sol y afines" de nuestro socio Andrés Majó Díaz.

